
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00183776 4

G H Hardy

LA

GÉOMÉTRIE GRECQUE.

10852 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

LA

GÉOMÉTRIE GRECQUE,

COMMENT SON HISTOIRE NOUS EST PARVENUE ET CE QUE NOUS EN SAVONS.

ESSAI CRITIQUE

PAR

PAUL TANNERY.

PREMIÈRE PARTIE,

HISTOIRE GÉNÉRALE DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1887


LIBRARY
AUG 28 1972
UNIVERSITY OF TORONTO

PRÉFACE.

Qui veut connaître réellement ce qu'était la Géométrie grecque, soit comme forme, soit comme fond, doit l'étudier sur les écrits mêmes ou, au moins, sur les traductions d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius et de Pappus. Mais ces écrits ne peuvent nous apprendre l'histoire de la Science; ils nous laissent ignorants de son origine, de ses premiers développements, de même que, par suite de la perte d'Ouvrages considérables, ils ne nous permettent pas d'apprécier, sans recourir à des conjectures, la direction des travaux concernant la Géométrie supérieure et le niveau réel des connaissances atteintes.

L'histoire de la Géométrie grecque doit donc faire appel à d'autres sources; soumettre ces sources à une critique méthodique et conforme aux principes applicables en pareille matière, c'est le but que je me suis proposé, parce qu'il m'a semblé que cela n'avait pas encore été fait d'une façon satisfaisante, malgré les travaux très importants qui ont été déjà publiés sur ce sujet. Rechercher spécialement comment les traditions se sont formées, comment elles nous ont été transmises, m'a paru, notamment dans la question des origines, indispensable pour déterminer ce que nous pouvons affirmer, ce que nous pouvons seulement considérer comme probable, ce qu'au contraire nous devons regarder comme purement conjectural ou même tout à fait incertain.

Sauf quelques détails sur la classification des Mathématiques dans l'antiquité, le présent Volume ne concerne que la Géométrie élémentaire, et même celle-ci n'y est traitée qu'au point de vue général. J'ai réuni les matériaux nécessaires pour continuer l'œuvre que j'ai entreprise : je dois dire toutefois que, pour les coniques et la Géométrie supérieure, je viens d'être devancé par M. Zeuthen dont l'Ouvrage danois, traduit en allemand par M. von Fischer-Benzon (*Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum*, Copenhague, Höst, 1886), a comblé, mieux que je ne rêvais pouvoir le faire, la lacune que présentait, jusqu'à présent, l'histoire de cette branche de la Science.

J'ai un autre devoir à remplir, c'est de témoigner ma profonde reconnaissance, d'un côté, pour la direction du *Bulletin des Sciences mathématiques*, dont la bienveillante hospitalité a accueilli mes études depuis le mois d'avril 1885 et m'a permis de les réunir en Volume ; de l'autre, pour les administrateurs de la Bibliothèque de l'Université de Leyde, dont la gracieuse libéralité a mis à ma disposition un manuscrit arabe, grâce auquel j'ai pu (*voir* Chap. XIII et XIV) préciser la nature du travail de Héron sur les *Éléments* et en publier quelques fragments inconnus.

Tonneins, le 18 juillet 1887.

TABLE DES MATIÈRES.

LA

GÉOMÉTRIE GRECQUE,

COMMENT SON HISTOIRE NOUS EST PARVENUE, ET CE QUE NOUS EN SAVONS.

IRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

INTRODUCTION.

Le vrai problème de l'histoire des Mathématiques anciennes.

1. Écartons de l'histoire des Mathématiques la partie proprement bibliographique, je veux dire la constatation matérielle des faits : telle phrase se trouve telle page, soit de telle édition de tel ouvrage, soit de tel manuscrit coté sous tel numéro dans telle bibliothèque ; écartons encore ce qui peut, comme dans l'*Aperçu historique* de Michel Chasles, former un des principaux attraits d'un livre, mais appartient en fait à la Science elle-même, bien loin de constituer une partie intégrante de son histoire ; j'entends les développements donnés à telle méthode, les relations établies entre elles et d'autres plus récentes, enfin les démonstrations de théorèmes ou solutions de problèmes, soit conçues dans l'esprit des procédés d'autrefois, soit seulement suggérées par leur étude.

Ce départ fait, que reste-t-il en réalité? Un tissu de conjectures, qui sont d'ailleurs à tous les degrés de probabilité, depuis celui qui vaut presque la certitude jusqu'à celui qui diffère à peine du doute, pour ne pas parler des hypothèses encore moins favorisées ; et encore ce tissu ressemble assez à la toile de Pénélope, car, s'il est vrai que l'on peut regarder comme allant toujours en augmentant la probabilité moyenne des résultats obtenus par la critique,

il n'en est nullement de même pour la probabilité spéciale à chaque assertion particulière; cette probabilité est sujette à de continuelles variations, et il n'est guère de point pour lequel l'opinion aujourd'hui dominante se trouve garantie contre une exclusion soit momentanée, soit définitive, à la suite ou bien de la mise en lumière de quelque fait nouveau, ou bien de l'apparition de quelque nouvelle hypothèse.

Coordonner la totalité des faits matériels, établir la filiation logique de ceux qui concordent entre eux, expliquer comment tels autres se trouvent en désaccord et déterminer, d'après cette explication, quels sont ceux qui ne devront pas être utilisés comme matériaux par l'historien futur, telle est la tâche, toujours inachevée, à laquelle travaille le critique. Et il ne peut guère se faire d'illusions sur le sort réservé à son œuvre: les faits dont il aura signalé l'importance, c'est aux sources mêmes, non dans ses écrits, que ses successeurs iront les rechercher pour les soumettre à un nouvel examen; les erreurs qu'il aura dissipées pourront ne plus jamais revenir embarrasser l'histoire; mais combien ce résultat purement négatif était au-dessous de ses aspirations! Les thèses positives, auxquelles il attachait le plus de poids et consacrait surtout ses veilles, que deviendront-elles, bientôt après sa mort, sinon avant? Qu'il jette un regard sur les exemples que lui offre un passé récent; quelle confiance peut-il garder dans l'avenir, s'il réfléchit à ce que pèsent en réalité aujourd'hui, dans la balance des opinions, les noms encore les plus justement honorés, ainsi celui de Letronne, pour ne pas en citer d'autres?

2. Il faut donc, dans la critique d'érudition, borner son ambition au présent et, sans trop préjuger l'avenir, s'efforcer d'assurer à ses opinions le plus possible de *probabilité actuelle*. Or à quoi se mesure cette probabilité? En fait, c'est à la proportion plus ou moins considérable d'adhésions rencontrées dans le cercle, d'ailleurs fort restreint, des érudits vivants s'occupant de l'ordre de questions dont il s'agit. A peine est-il besoin d'ajouter que, pour une évaluation effective, il conviendrait d'introduire des coefficients personnels; un savant comme Moritz Cantor, comme Friedrich Hultsch, comme J.-L. Heiberg, en vaut plusieurs autres, mais il ne réclame, ni ne peut réclamer l'infaillibilité. Quant à

ceux qui sont disparus de la scène et que parfois on invoque encore, ils ne comptent plus guère; ils n'ont pas su ce qui a été appris depuis, ils n'ont pu peser les nouveaux arguments, enfin et surtout, ils n'étaient pas dans le courant d'idées actuel.

Pourquoi insisté-je sur ce dernier point? Je vais chercher à l'expliquer, d'autant qu'il s'agit d'un élément considérable dans l'appréciation des opinions.

Voici déjà la dixième année depuis que j'ai commencé à publier, sur l'histoire des Sciences, quelques-unes de mes conjectures personnelles; à partir du moment où mes humbles essais ont attiré quelque attention, il est une question que j'ai souvent eu à me poser; pourquoi telle hypothèse, que j'émettais presque sans preuves, souvent à titre de simple possibilité, rencontrait-elle un assentiment général? Comment telle autre au contraire, que je m'étonnais d'être le premier à soutenir, tant elle me semblait naturelle, tant elle ressortait invinciblement pour moi de l'ensemble des faits, comment trouvait-elle des adversaires? Étudiais-je des travaux étrangers, je voyais surgir devant moi le même problème: tel point qui, à mes yeux, ne faisait pas l'ombre d'un doute, telle question qui me semblait devoir se régler en quelques mots, devenait l'objet de discussions approfondies, de polémiques sérieuses et prolongées.

J'ai cru m'expliquer tout cela, au moins dans une certaine mesure, en réfléchissant sur les motifs qui me déterminaient moi-même à adopter ou à rejeter telle ou telle conjecture nouvelle. Certainement, en présence d'une opinion qui n'est pas encore la sienne, le critique cherchera à être aussi impartial que possible; il pèsera le pour et le contre d'après les données objectives de la question, il cherchera à éliminer, autant que faire se peut, tout motif personnel de décision. Mais une pareille élimination est impossible à faire complètement; qu'on parvienne à la réaliser sans exception aucune, on ne sera plus soi-même.

Avant de se hasarder à rien produire, chaque érudit a dû accomplir pour lui-même, au moins à titre provisoire, la coordination logique de l'ensemble des faits qu'il connaît; il a dû jeter ainsi les fondements nécessaires de l'œuvre qu'il rêve. A la vérité, cette coordination, il la remanie sans cesse; mais telle qu'elle est à un moment donné, elle n'en jouera pas moins, qu'il en ait d'ailleurs

plus ou moins conscience, le rôle d'un calibre ou d'un gabarit d'essai. Une thèse nouvelle s'y adapte-t-elle d'elle-même, elle aura toute chance d'être acceptée d'emblée; qu'au contraire elle ne se prête pas au cadre préétabli, elle sera l'objet d'une critique plus attentive, de réserves plus scrupuleuses; et cela, indépendamment de la valeur propre des arguments qui l'appuient.

Ce que je viens de dire pour un érudit en particulier peut s'appliquer à l'ensemble; nul ne peut connaître la totalité des faits à coordonner; les éléments employés ne sont donc pas exactement les mêmes pour chacun, leur connexion variera également suivant les tournures d'esprit particulières. Néanmoins, à un moment donné, il y a un ensemble d'idées commun à tous et par suite prédominant; la chance de succès d'une conjecture nouvelle diffère donc selon qu'elle est plus ou moins en harmonie avec cet ensemble commun.

3. Je n'ai nullement la prétention d'exposer quel est aujourd'hui le courant d'idées prépondérant; mais on pourrait croire *a priori* qu'il n'est susceptible que de lentes modifications; je voudrais, par une rapide esquisse des traits les plus importants, du moins à mes yeux, montrer qu'il est au contraire sujet à de brusques variations, soit par suite du travail interne accompli chez chaque érudit, soit en raison du renouvellement continu des savants qui attirent le plus l'attention par leurs travaux.

Il y a une douzaine d'années, la conception générale de l'histoire des Mathématiques, telle qu'elle se dégage, par exemple, de l'œuvre de Hankel, présentait un caractère qui, jusqu'à un certain point, était marqué au sceau des doctrines de l'*évolution*, déjà en grande faveur dans les milieux philosophique et scientifique. Les éléments de la Science ont été élaborés, dans une mesure sans doute mal connue, mais certainement considérable, chez les peuples de l'antiquité dont la civilisation a précédé celle de la Grèce. Depuis cette obscure origine, malgré les apparences contraires, le progrès a été incessant; d'abord les Grecs, puis les Hindous, enfin les Arabes; chaque peuple a développé suivant son génie propre, et en donnant tout ce qu'il pouvait donner, des branches spéciales de la Science; l'héritage sacré, fidèlement transmis et successivement accru, arrive aux nations de l'Occident moderne; la diversité

de leurs races, l'heureuse rivalité qu'elles déploient, la rapide diffusion chez toutes des découvertes dues à chacune, semblent désormais assurer que le progrès indéfini de l'avenir n'exigera pas, comme dans le passé, de partielles et successives décadences.

Ainsi, autrefois, aux Grecs la Géométrie, aux Hindous l'Arithmétique et l'Algèbre ; la spécialité des aptitudes est nettement tranchée, Diophante est à peine un Grec, il n'est pas possible qu'il n'ait point subi quelque influence orientale : si ses écrits ne nous avaient pas été conservés dans la langue qu'il parlait, personne ne pourrait soupçonner qu'ils soient un fruit du génie hellène.

Les deux tendances opposées se réunissent chez les Arabes ; ceux-ci s'attachent spécialement à l'Astronomie, mais en même temps ils commencent cette longue élaboration qui s'achèvera à la Renaissance avant d'aboutir à la révolution cartésienne, à l'ouverture de l'ère glorieuse des Mathématiques modernes. Depuis lors, aucun indice ne peut faire soupçonner qu'il nous manque, comme il manquait aux Grecs, quelque élément nécessaire pour la poursuite des travaux mathématiques, et la Science, à jamais rajeunie, pourra toujours nourrir *un long espoir et de vastes pensers.*

4. Rapprochons de cette esquisse sommaire quelques-uns des traits qui se dessinent dans la partie déjà publiée (1880) des *Vorlesungen* de M. Cantor. Ce Volume marque en effet d'une façon décisive la transition mesurée de l'ancien au nouveau courant d'idées qui, depuis, va s'accentuant de plus en plus. La conception évolutive s'efface ; il n'en subsiste que quelques rares éléments dont l'indiscutable vérité s'adapte au changement du point de vue. La Science, en tant que l'on n'abuse point de son nom, éclôt chez les Grecs, presque brusquement, en tout cas intégralement ; après avoir donné des fruits immortels, elle subit un irrécusable déclin, végète plus ou moins misérablement pendant de longs siècles, avant de retrouver sa vitalité primitive et de prendre, dans les temps modernes, un nouvel et définitif essor.

L'explication du papyrus mathématique égyptien par Eisenlohr, le déchiffrement de quelques tablettes chargées d'écritures cunéiformes, nous ont révélé des faits curieux et permis de préciser un peu mieux le point de départ des découvertes hellènes ; mais,

en thèse générale, ces documents ont singulièrement rabaissé l'opinion que l'on se faisait des connaissances mathématiques chez les Égyptiens et chez les Babyloniens, quoique d'ailleurs la plupart des orientalistes soient toujours disposés à s'exagérer ces connaissances, et que notamment l'histoire des origines de l'Astronomie soit encore loin d'être suffisamment éclaircie.

Quant aux mathématiciens hindous et arabes, leur étude plus approfondie n'a nullement confirmé les thèses de Hankel : certes, il reste encore bien à apprendre à leur sujet, mais les découvertes, qui sont encore à faire dans leurs écrits, ne semblent plus devoir offrir un intérêt aussi puissant qu'on était porté à l'espérer. Plus on les examine, plus ils apparaissent comme dépendants des Grecs et, malgré quelques inventions heureuses et vraiment originales, restés en moyenne bien inférieures à leurs devanciers sous tous les rapports. J'ajoute que l'on est encore certainement assez loin d'avoir restitué aux Grecs tout ce qui leur appartient légitimement dans les travaux attribués à leurs héritiers scientifiques. J'en veux donner une seule preuve :

De tous les instruments astronomiques des Arabes, étudiés par A. Sédillot et donnés par lui comme étant de leur invention, le plus intéressant est sans contredit l'*astrolabe planisphère* qui permettait de déterminer l'heure au moyen d'une observation de hauteur sur le Soleil ou sur une étoile, et d'une opération consistant à faire mouvoir l'un sur l'autre deux cercles figurant en projection stéréographique, l'un la sphère mobile, l'autre la sphère fixe. Cet instrument a d'ailleurs joué un rôle historique d'autant plus important que jusqu'à l'invention des horloges à pendule, les astronomes n'avaient aucun moyen exact pour déterminer l'heure pendant la nuit sans observations des étoiles, et que l'*astrolabe planisphère* leur permettait de résoudre le problème sans calcul. Or ce même astrolabe se trouve exactement décrit dans un Traité grec (¹) composé par Jean le grammairien (Philopon) au commencement du VIᵉ siècle après J.-C., et la nomenclature grecque des pièces de l'instrument a même été servilement adoptée par les

(¹) Publié par Hase dans le *Rheinisches Museum* en 1839, mais n'en étant pas plus connu.

Arabes. Notre auteur le donne d'ailleurs comme connu dès le temps de Ptolémée, et rien ne doit faire supposer qu'en fait l'invention ait été d'une date plus récente (1).

5. Ainsi il est permis de penser que la conception générale actuelle de l'histoire des Mathématiques ira en s'affermissant de plus en plus, au moins pendant une ou deux générations ; il est clair d'ailleurs qu'elle revient très sensiblement à celle qui dominait, d'après Montucla, il y a une cinquantaine d'années, vers le moment où Michel Chasles ouvrit une ère nouvelle pour l'étude de cette histoire.

Je ne fais point cette remarque pour en tirer une conclusion sceptique ; bien au contraire, la double évolution que j'ai indiquée n'aurait certainement pu s'accomplir sans la coordination historique d'un nombre considérable de faits inconnus ou mal connus il y a un demi-siècle. Qui ne s'est pas mis au courant du mouvement critique depuis cette époque pourrait croire à quelque découverte capitale, à quelque travail hors ligne capable de changer d'un seul coup l'orientation des esprits ; il n'en a rien été : le mouvement a résulté d'une quantités de faits souvent assez minimes, de discussions minutieuses, d'études de détail et de monographies fragmentaires.

La véritable conséquence à formuler, c'est que la plus humble contribution ne doit pas être négligée et qu'il ne faut pas se rebuter devant des détails parfois d'apparence fastidieuse ; tout au plus convient-il d'ajouter une réserve pour ceux qui craignent les inconvénients du trop grand éparpillement des efforts (2); c'est

(1) Je soupçonne que le principe en remonte aux Babyloniens, dont on a des observations faites de nuit et marquées en *heures temporaires;* seulement, avant la découverte de la propriété des projections stéréographiques, l'instrument devait consister en une sphère mobile autour d'un axe incliné comme l'axe du monde, et en un hémisphère creux, fixe et concentrique, analogue à celui des cadrans solaires primitifs. Le nom d'*araignée* (ἀράχνη), donné, dans l'*astrolabe planisphère*, au cercle représentant la sphère mobile (parce qu'il était découpé à jour pour permettre d'obtenir les coïncidences avec l'autre cercle, lequel était massif), était également le nom donné, d'après Vitruve, au cadran *sphérique* d'Eudoxe. En tout cas, il ne me paraît pas douteux qu'un instrument analogue n'ait servi, avant l'invention de la Trigonométrie, à résoudre mécaniquement les problèmes de la sphérique.

(2) Le danger est réel dans le vaste domaine de la Philologie: dans le cercle

que le travailleur fera bien de tenir compte des courants d'idées dominants, des questions à l'ordre du jour, et de relever ainsi la minutie des détails qu'il étudie.

Mon objet maintenant va précisément être, après avoir indiqué les principaux problèmes qui s'imposent aujourd'hui dans l'histoire des Mathématiques anciennes, de montrer, par quelques exemples, comment leur solution dépend de questions qui paraissent, à première vue, d'une importance tout à fait secondaire. On ne s'étonnera pas si je choisis ces exemples parmi des conjectures que j'ai déjà proposées, et qui, à côté d'adhésions parfois peu espérées, ont rencontré de sérieux contradicteurs. En appelant de nouveau l'attention sur elles, j'ai le ferme espoir soit de convaincre ceux qui les ont rejetées jusqu'à présent, soit de provoquer de leur part des recherches fécondes pour la vérité.

6. L'histoire n'a pas pour unique objet la satisfaction d'une vaine curiosité ; c'est l'avenir que finalement doit éclairer l'étude du passé. Or un mathématicien, vraiment digne de ce nom, peut-il ne pas se préoccuper parfois du sort futur réservé à la Science à laquelle il s'est consacré? Peut-on vraiment parler de progrès indéfini? Ne trouvera-t-on pas le tuf un jour, et ne faudra-t-il pas, comme disait Lagrange, abandonner la mine trop profonde? Certes la question n'est pas urgente ; à la vitesse actuelle du progrès, il semble bien que l'on ait au moins deux siècles pour se demander ce qu'il conviendra de faire en pareil cas et comment conserver au mieux les trésors acquis, si l'espoir de les accroître est enfin interdit. Mais d'ici là, quelque bouleversement social ne peut-il entraîner la ruine de la Science? Elle n'a plus, dira-t-on, rien à craindre sérieusement des crises passagères, et toute société un peu stable protégera et encouragera forcément les savants, dont les services sont, de nos jours, non seulement utiles, mais même nécessaires. Cela est incontestable pour les chimistes, les physiciens, et, si l'on veut, aussi les astronomes ; la Mathématique pure sera donc garantie par son utilité dans les sciences de la nature. Mais, si la question d'utilité se pose, n'est-il pas à craindre que la protection et les en-

---

malheureusement très restreint qui s'occupe de l'histoire des Mathématiques, il est loin d'être à redouter encore.

couragements ne se bornent à certaines branches, et ne délaissent les autres, précisément les plus élevées et les plus abstruses? Supposons maintenant que l'histoire démontre que, pour la Science, l'arrêt dans la marche en avant équivaut à un recul, qu'on ne peut vouloir se borner aux parties nécessaires pour les applications, sans arriver peu à peu à négliger de plus en plus la théorie et à n'en conserver finalement que des débris tout à fait insuffisants; que deviendrait dès lors la garantie de l'*utilité?* Si le danger que je signale ici n'est pas imaginaire, peut-on affirmer que, comme le premier, il est encore bien loin de nous, et qu'une génération prochaine n'aura pas à s'en préoccuper?

On peut voir, devant ces questions, quel intérêt majeur présente l'histoire des Mathématiques anciennes du moment où elles nous offrent l'exemple d'une décadence profonde après un brillant apogée; et l'on peut affirmer, de ce point de vue, que le *vrai problème* qui s'impose aujourd'hui dans cette histoire est de *préciser les circonstances et de déterminer les causes de la décadence passée, en vue de connaître les précautions à prendre pour éviter une décadence future.*

Je n'ai, bien entendu, aucunement la prétention de résoudre un problème aussi complexe; je voudrais seulement préciser dans une certaine mesure les diverses questions qu'il soulève, et donner quelques indications sur la marche à suivre pour en traiter au moins une.

7. Il est à peine besoin de réfuter sérieusement l'opinion qui attribuerait aux invasions barbares la décadence des sciences grecques. Quand, au VII[e] siècle, les Arabes entrèrent dans Alexandrie, la glorieuse cité des Ptolémées pouvait avoir encore une école, mais depuis trois cents ans au moins cette école était incapable de produire autre chose que de pâles commentateurs des œuvres antiques; si parfois encore ils nous font illusion, nous n'en devons pas moins nous dire que le niveau est déjà tombé aussi bas qu'il le fut en moyenne chez les Byzantins pendant les longs siècles du moyen âge. Un exemple suffira pour le prouver :

Richard Hoche a publié (1864 et 1867) un commentaire de Jean le grammairien (Philopon) sur l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque et en même temps, pour le premier Livre seulement,

les importantes variantes que lui donnait une réédition de ce commentaire contenu dans un manuscrit de la bibliothèque épiscopale de Zeitz. Philopon, quoique n'étant pas particulièrement mathématicien, était certainement considéré de son temps comme un savant universel de la plus haute valeur; son commentaire doit d'ailleurs reproduire l'enseignement d'un maître également considérable, et dont la compétence mathématique était bien reconnue, Ammonius, fils d'Hermias ; il est cependant difficile d'imaginer les erreurs grossières qu'il a entassées dans ses volumineuses dissertations. Or ces erreurs sont en général assez bien corrigées dans la réédition de Zeitz, et l'auteur anonyme fait certainement preuve et d'une meilleure intelligence du texte de Nicomaque et de connaissances mathématiques mieux digérées; Hoche a bien reconnu que cet auteur était postérieur à Philopon, mais il a pensé que ce pouvait être un de ses disciples. Il n'est rien; le manuscrit n° 2377 du fonds grec de la Bibliothèque Nationale de Paris contient le même texte avec des annotations marginales qui établissent que la réédition est due au moine Isaac Argyros, lequel vivait dans la seconde moitié du XIV[e] siècle.

8. La décadence de la Mathématique grecque remonte donc à une époque bien antérieure au VII[e] siècle, et en tous cas on ne peut s'arrêter avant les derniers grands noms que présente l'Ecole d'Alexandrie, ceux de Pappus et de Diophante. C'est l'âge qui précède immédiatement celui de Constantin et du triomphe du christianisme; on a pu dire, avec quelque apparence de raison, que la profonde révolution qui s'ensuivit fut fatale à la Science; il est certain que dès lors se proposa à l'humanité un idéal tout autre que celui qu'avaient fait briller Platon et Aristote, la vie du savant contemplant *la théorie pour elle-même*. Mais si, depuis la Renaissance, cet idéal retrouvé a gardé d'assez nombreux fidèles, sommes-nous assurés qu'une nouvelle révolution sociale ne l'éteindra pas au profit des doctrines utilitaires?

Au reste l'accusation tombe à faux sur le christianisme; comme les barbares n'ont pas eu la peine de faire crouler la société gréco-romaine, déjà tombée d'elle-même, le christianisme n'a eu qu'à liquider la banqueroute de la philosophie officielle, après le siècle des Antonins. L'idéal platonicien avait dès longtemps disparu de-

vant celui des Stoïciens, *utilitaire au fond et par suite contraire à la Science*, malgré les apparences de sa morale sublime. La secte du Portique arriva, il est vrai, d'assez bonne heure à rallier assez d'intelligences pour qu'il lui fallût tenir en quelque honneur les connaissances scientifiques négligées par ses fondateurs; mais ses doctrines ne pouvaient sérieusement favoriser le développement de ces connaissances, et la suprématie qu'elle obtint semble avoir été au moins inutile pour la Science, aussi bien qu'elle le fut pour le maintien des institutions sociales. Bientôt peut-être l'histoire portera sur cette secte, souvent exaltée, un jugement plus sévère encore.

Quoi qu'il en soit, pour la question qui nous occupe, il s'agit sans contredit d'étudier la période qui remonte depuis Pappus et Diophante jusqu'à l'apogée de la Géométrie grecque, au temps d'Apollonius de Perge. Dans cet intervalle de cinq siècles environ, un nouveau point de repère nous permet de diviser le problème; la décadence a-t-elle réellement commencé avant l'extension de la domination romaine sur la Grèce et l'Orient hellénisé? A-t-elle au contraire suivi cette extension, qui semblerait dès lors avoir été une des causes déterminantes de cette décadence?

Actuellement la question est très obscure; *a priori*, la perte de l'indépendance pour les États hellènes, la domination d'un peuple dont le génie pratique n'a jamais pu se plier aux abstractions scientifiques, ont dû porter un coup funeste aux études mathématiques sérieuses; mais on peut dire d'un autre côté que, les ruines de la conquête une fois réparées, les pays grecs purent profiter des bienfaits d'une longue paix qui leur avait toujours manqué, que les Romains reconnurent de très bonne heure la supériorité intellectuelle de la race hellène, et que les études scientifiques retrouvèrent bien vite une protection très largement suffisante. Enfin l'histoire montre que, malgré leur défaite momentanée, les Grecs possédaient encore plus de vitalité que les Romains.

9. Il n'est d'ailleurs ni établi historiquement, ni unanimement reconnu que le niveau moyen de la Science pendant la période gréco-romaine ait été inférieur à celui de la période gréco-alexandrine. C'est en ces termes que peut se préciser la première question à résoudre, et, pour l'étudier, il convient de dresser séparé-

ment le bilan pour chacune des branches principales à considérer: Arithmétique, Algèbre, Géométrie élémentaire, Géométrie supérieure, Astronomie.

Pour l'Arithmétique, la question, je crois, est aujourd'hui bien tranchée; personne ne peut plus considérer comme des auteurs originaux, ainsi que le faisait Nesselmann, de pseudo-mathématiciens, tels que Nicomaque ou Théon de Smyrne. Les connaissances qu'ils nous ont transmises appartiennent en totalité soit à la période purement hellène, soit à la période alexandrine; si la forme de l'exposition est leur propriété, elle constitue un symptôme irrécusable de décadence. L'Arithmétique théorique n'a été cultivée scientifiquement chez les anciens qu'avec l'appareil géométrique euclidien, et comme travail de ce genre postérieur à notre ère, nous ne connaissons que l'opuscule *des nombres polygones* de Diophante, essai incontestablement malheureux.

En ce qui concerne l'Astronomie, la question de supériorité a été très vivement controversée entre Hipparque et Ptolémée; mais elle offre, pour le problème qui nous occupe, moins d'intérêt qu'on ne pourrait le penser tout d'abord; l'Astronomie comporte en effet deux sortes d'éléments, les uns empruntés à l'observation, les autres à la théorie; pour les premiers, l'astronome le plus récent a toujours l'avantage; Ptolémée a donc incontestablement réalisé des progrès sur Hipparque, de même que les Arabes en ont réalisé sur lui; la question à résoudre pourrait être de savoir si les uns ou les autres ont bien tiré des matériaux dont ils disposaient tout le parti possible; mais nous ne sommes encore capables d'y répondre sérieusement ni pour Hipparque, ni pour Ptolémée, ni pour les Arabes, et en tout cas la réponse n'aurait pas de portée réelle en ce qui concerne la Mathématique pure. Quant à la partie théorique du système de Ptolémée, on est d'accord pour reconnaître qu'elle appartient, comme fond, aux premiers Alexandrins; la théorie des épicycles et la Trigonométrie remontent à Apollonius et à Hipparque. Toutefois il reste nombre de points secondaires à éclaircir, et en tout cas une histoire réelle de la sphérique ancienne est à peu près entièrement à faire.

Pour l'Algèbre et la Géométrie supérieure (Diophante et Pappus), la question est au contraire particulièrement grave et passablement obscure; à la vérité, personne ne soutiendrait plus les paradoxes

de Hankel que je rappelais tout à l'heure, et l'on a réuni assez d'indices pour être assuré que les problèmes traités par Diophante lui sont en réalité bien antérieurs; Pappus, d'autre part, nous a laissé un recueil précieux, mais qui n'est, en fait, qu'une compilation de travaux remontant pour la plupart à une date antérieure à l'ère chrétienne. Ces deux contemporains paraissent ainsi avoir obéi au même mouvement qui, à leur époque, après la chute du stoïcisme officiel, ramenait les philosophes vers les sources antiques, et donnait ainsi la passagère illusion d'une renaissance bientôt condamnée à l'avortement. Il n'en est pas moins vrai que le degré d'originalité de Diophante reste incertain, de même que le degré de nouveauté de ses méthodes et de ses notations. Pour être résolues, les questions qu'il soulève réclament de longues discussions et avant tout la publication d'une édition critique de son Ouvrage. Je crois devoir d'autant plus préciser ainsi l'état actuel du problème, que mon opinion personnelle est mieux arrêtée sur le peu de valeur propre de Diophante, et que cette opinion a été plus favorablement accueillie jusqu'à présent, malgré le défaut de preuves péremptoires.

Pour Pappus, nous possédons désormais ce qui manque pour Diophante, une bonne édition, celle de Hultsch; mais il reste à l'étudier à fond, ce qui demandera des efforts soutenus et répétés, car la mine à exploiter sera difficilement épuisée. Les travaux de Géométrie entre Apollonius et Pappus sont en fait très peu connus, et leur caractère s'apprécie aussi mal que leur importance; si, après les *Coniques* du géomètre de Perge, il n'est paru aucun Ouvrage qui soit devenu classique, le sort qui attendait ses successeurs a peut-être eu son motif dans le déclin des études plutôt que dans l'imperfection de l'œuvre. D'un autre côté, il est certain que les traités classiques d'analyse géométrique ont été l'objet, après leur rédaction, de travaux approfondis qui avaient au moins pour but de faciliter l'étude des matières dont traitaient ces Ouvrages. Les indications que Pappus donne sur ces travaux, les lemmes qu'il en a tirés, doivent être soigneusement examinés pour déterminer quels progrès réels ont pu être réalisés.

10. Ainsi, des cinq branches que nous avons distinguées dans la Science, deux sont à mettre hors de compte; deux autres présentent pour leur histoire des difficultés majeures qui ne permet-

tent pas d'espérer une prompte solution, en ce qui les concerne, du problème que j'ai posé. Heureusement, pour la cinquième branche, il n'en est pas ainsi.

Pour la Géométrie élémentaire en effet, en regard de l'œuvre d'Euclide, nous possédons le *Commentaire sur le premier Livre*, écrit au ve siècle après J.-C. par Proclus, chef de l'École d'Athènes. S'il est possible de démontrer, par l'examen de ce commentaire, qu'aucune idée nouvelle n'a été émise sur les principes de la Science, depuis le premier siècle avant l'ère chrétienne jusqu'à Proclus, la question sera tranchée pour la branche qui nous occupe, comme elle l'est, avons-nous dit, pour l'Arithmétique théorique, et il est clair que pour toute la période correspondante, il y aura un motif suffisant de préjuger défavorablement ce qui concerne les branches supérieures; alors que les éléments sont négligés, il n'est guère à penser que des progrès se réalisent plus haut.

Le *Commentaire* de Proclus peut être divisé en deux Parties bien distinctes : la première, après un double prologue consacré à des considérations générales, d'abord sur l'ensemble des Mathématiques, puis sur la Géométrie en particulier, traite des définitions, des postulats et des axiomes; la seconde Partie commente les propositions du Livre I d'Euclide. Or j'ai déjà avancé à diverses reprises que Proclus avait emprunté à très peu près tout ce qui est réellement mathématique dans son commentaire, pour la première partie à Geminus, auteur du Ier siècle avant l'ère chrétienne, pour la seconde à Porphyre, qui, au IIIe siècle après J.-C., avait commencé à écrire sur les propositions d'Euclide. Si cette double thèse était établie, il ne resterait qu'à constater, ce qui est facile, que le commentaire relatif aux propositions ne présente aucun intérêt réel au point de vue mathématique.

Heiberg (*Philologus*, XLIII, 2, p. 345) m'a objecté que j'estimais trop peu Proclus et que j'exagérais en le qualifiant de *copiste infatigable*. Nous avons cependant un témoignage bien connu depuis longtemps de la façon dont notre philosophe entendait la rédaction d'ouvrages mathématiques : c'est le Traité *De la sphère* de Proclus, c'est-à-dire une copie textuelle des chapitres III, IV, XII et II de l'*Introduction aux phénomènes* qui nous reste, précisément de ce Geminus si souvent cité dans la première partie du *Commentaire sur Euclide*.

Mais je suis le premier à reconnaître que ce témoignage n'est

pas suffisant pour établir sérieusement la conjecture que j'ai émise; quel est d'ailleurs l'intérêt de cette conjecture, peut-être d'apparence assez insignifiante de prime abord, je crois l'avoir suffisamment montré; comment donc la discuter à fond? Il faut procéder à une analyse complète, à un examen circonstancié de l'Ouvrage de Proclus, et faire, en procédant suivant les règles de la critique, le départ entre ce qui peut lui appartenir et ce qu'il a dû emprunter à autrui. On reconnaîtra sans aucun doute que Proclus n'est pas simplement un copiste, que de longs développements sont bien de son propre cru; mais on s'apercevra également que son originalité ne s'exerce que sur les questions qu'il considère comme touchant la Philosophie, qu'en somme pour nous, elle n'a qu'une conséquence fâcheuse, c'est que ce qui nous intéresse vraiment, se trouve noyé dans un fatras pseudo-philosophique dont nous n'avons que faire.

11. Le travail dont j'indique le plan peut sembler devoir être fastidieux dans ses détails, surtout à cause de cet élément néoplatonicien introduit par Proclus dans les questions mathématiques, et qu'il s'agit d'écarter. Mais ce travail n'en est pas moins nécessaire, si l'on veut vraiment résoudre les problèmes posés; d'ailleurs il offrira un attrait spécial qui suffirait à lui seul pour soutenir l'attention.

Proclus est en fait la source capitale pour l'histoire de la Géométrie chez les Grecs: en exceptant Pappus, c'est-à-dire la géométrie supérieure, on ne trouve en dehors de lui qu'un petit nombre de documents épars, qu'il serait absolument impossible de coordonner s'il nous manquait. Dès lors la question de savoir où il puise ses renseignements historiques est une des plus graves qui se présentent pour le critique.

Que Proclus n'ait connu par lui-même aucun Ouvrage géométrique antérieur à Euclide, c'est un point unanimement concédé; mais qu'il n'ait pas même utilisé directement l'*histoire géométrique* composée un peu avant Euclide par le disciple d'Aristote, Eudème de Rhodes, alors qu'il le cite assez fréquemment, je crois avoir été le premier à soutenir cette thèse[1]. Heiberg (*loc. cit.*, p. 492),

---

[1] *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'histoire des Mathématiques* (*Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, 1882).

en la déclarant insuffisamment fondée, remarque très justement qu'elle dépend d'une question plus importante, dit-il, mais trop peu débattue, celle de savoir ce que les derniers siècles de l'antiquité possédaient encore de l'ensemble des écrits plus anciens.

La gravité de cette dernière question n'échappera à personne; mais il est clair que, si elle touche la Philologie en général, elle ne peut être résolue que par des travaux spéciaux pour les différentes branches de la littérature. L'historien des Mathématiques n'a pas à se préoccuper de savoir au juste quels poètes, perdus pour nous, Proclus pouvait encore lire; il lui suffit de savoir, en thèse générale, que, dès le ve siècle de notre ère, des Ouvrages qui, cependant, avaient dû rester longtemps accessibles, étaient désormais introuvables; mais, ce point incontestable étant bien admis, il ne peut se dérober devant la tâche qui lui incombe, de discerner si Proclus a, en réalité, directement puisé à telle source antique.

La question ne peut être résolue autrement que par l'étude approfondie du *Commentaire sur Euclide;* c'est seulement après s'être familiarisé avec les procédés de Proclus qu'il est possible de juger quand il fait une citation de première ou de seconde main. Le problème se rattache d'ailleurs à ceux que j'ai posés plus haut; car, à partir du moment où une œuvre aussi intéressante pour le mathématicien que celle d'Eudème a commencé à être négligée, où son autorité n'a plus été invoquée que sur la foi d'autrui, il est bien à présumer que la Science était déjà sur la pente de l'irrémédiable déclin; mais, en même temps, la question se transforme et s'élargit.

Il ne s'agit de rien moins, en fait, que de *la tradition de l'histoire de la Géométrie chez les Grecs;* comment et sur quels documents a-t-elle été composée à l'origine, avec quelle fidélité a-t-elle été transmise, quel degré de probabilité présente donc chacune des données de cette histoire, voilà en effet quels problèmes soulèvera à chaque instant l'étude du *Commentaire* dû à Proclus. Il est clair, par exemple, que tel texte, relatif aux temps avant Euclide, prendra une signification toute différente, suivant que l'on devra le considérer comme emprunté à Eudème, ou comme, au contraire, venant de Geminus; dans certains cas même, l'interprétation littérale pourra changer.

Le travail, ainsi conçu, ne pourra évidemment se borner à Proclus, quoique ce dernier doive toujours fournir, et de beaucoup.

la somme de matériaux la plus considérable. Que ce travail soit d'ailleurs indispensable et doive précéder tout essai d'une histoire véritable et réelle de la Géométrie, il est à peine utile de le faire remarquer; il s'agit de l'application d'une des règles les plus élémentaires de la critique; cependant, ce sujet n'a pas encore été traité d'une façon systématique, et, par suite, il est presque neuf. Sans doute, lorsque Bretschneider ([1]) a recueilli soigneusement les documents relatifs à la période préeuclidienne, si mal traitée dans Montucla, il lui a bien fallu discuter la valeur de chacun de ces documents; c'est bien aussi ce que fait aujourd'hui, plus complètement et plus judicieusement, G.-J. Allman, qui a repris la tâche de Bretschneider ([2]). Mais l'examen critique a toujours porté, en thèse générale, plutôt sur les documents considérés en eux-mêmes, dans leur probabilité intrinsèque, que sur leur origine réelle et sur leur filiation. Il y a là un point de vue important, qui jusqu'à présent, a été trop négligé.

([1]) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklid*, Leipzig, 1870.

([2]) *Greek Geometry from Thales to Euclid* publiée dans l'*Hermathena* (Dublin, vol. III, 1877; IV, 1881; V, n° 10, 1884; n° 11, 1885).

CHAPITRE I.

Proclus et Geminus.

1. On est aujourd'hui d'accord pour reconnaître que les citations de Geminus, dans le *Commentaire sur Euclide* par Proclus, se rapportent à un seul et même Ouvrage, mais, comme Proclus n'en a pas conservé le titre, il faut le chercher ailleurs.

M. Cantor a indiqué celui que donne Pappus (p. 1026) : Περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεως, *Sur le classement des sciences mathématiques*, titre qui convient parfaitement à l'extrait de Geminus, très nettement déterminé, que renferme la première Partie du prologue de Proclus (p. 38,1-42,8), ainsi qu'aux fragments [1] contenus dans la compilation (*Anonymi variæ collectiones*) publiée par Hultsch à la fin de son édition de Héron (p. 246,15-249,12), ou encore aux scolies sur le *Charmide* de Platon (p. 513, 52), qui reproduisent, avec de précieuses variantes, deux de ces fragments (5 et 9). Il est, au contraire, bien difficile d'admettre le même titre pour la plupart des autres extraits faits par Proclus, pour ceux surtout qui entrent, sur la Géométrie en particulier, dans des détails tout à fait spéciaux.

Les autres historiens, depuis le XVI[e] siècle, répétaient un titre qui paraît avoir été forgé par le premier traducteur de Proclus, Barocius (1560) : *Libri geometricarum enarrationum,* et ils parlaient aussi de six Livres pour l'ensemble de l'Ouvrage, jusqu'à ce que Nesselmann, en 1842 (p. 4-5), remarquât que le titre admis ne reposait sur aucun texte, que, d'autre part, la donnée des six Livres devait provenir de ce qu'en effet Eutocius, au début de son commentaire sur Apollonius, cite Geminus *in sexto mathemati-*

---

[1] En réalité, ces fragments sont anonymes et je crois, pour ma part, qu'ils proviennent directement d'Anatolius, auteur du III[e] siècle, qui, lui-même, avait compilé Geminus, comme Proclus l'a fait plus tard. Je discuterai ultérieurement la question.

carum præceptionum libro (¹). Mais, par la plus singulière inadvertance, Nesselmann ajoute que le texte grec d'Eutocius est encore inédit, et dès lors il n'ose appuyer une traduction passablement suspecte.

Le passage d'Eutocius, capital pour l'histoire des coniques, est bien connu et a souvent été invoqué ; mais personne, que je sache, ne s'est encore avisé d'y relever le véritable titre de l'Ouvrage cité : Ἐν τῷ ἕκτῳ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας, *Théorie des Mathématiques* (*Livre* VI), qui cadre cependant si parfaitement avec tous les extraits de cet Ouvrage, et qui, d'autre part, convient très bien à l'époque de Geminus.

Le titre que donne Pappus doit être regardé comme désignant spécialement une partie de l'Ouvrage, sans doute le premier Livre; si d'ailleurs le sixième traitait des coniques, ce n'était pas le dernier, puisque Proclus nous a conservé des détails sur d'autres courbes qui ne devaient venir qu'après; si enfin Geminus avait terminé son œuvre, et parlé des autres branches des Mathématiques avec autant de développements que de la Géométrie, le nombre des Livres devait certainement être considérable.

Le titre de l'Ouvrage en indique suffisamment l'objet; c'était un tableau d'ensemble de la Science, tableau méthodique et raisonné, où les détails historiques ne figuraient qu'accessoirement ; mais si cette sorte d'encyclopédie mathématique nous était parvenue tout entière, elle n'en serait pas moins pour nous, même au point de vue historique, d'un prix inestimable, puisque, écrite vers la fin de la période gréco-alexandrine, elle nous renseignerait de la façon la plus précise sur l'état exact de la Science à ce moment décisif d'où semble dater son déclin.

2. La comparaison des diverses sources indiquées plus haut pour la partie de l'Ouvrage de Geminus relative au classement des Mathématiques (²) nous montre que, malheureusement, aucune de ces sources ne peut être regardée comme reproduisant

(¹) Traduction de Commandin (1566), conservée dans l'édition gréco-latine de Halley, p. 9.

(²) Notamment le rapprochement des fragments 9, 10 des *Variæ Collectiones* avec Proclus, p. 40, 2 9.

exactement le texte original; si notamment Proclus paraît bien, en thèse générale, conserver les expressions de Geminus, il l'abrège singulièrement, il l'analyse plutôt qu'il ne le copie réellement; il faut donc nous contenter, en tous cas, de rechercher dans les extraits de Proclus plutôt le sens général des fragments de l'Ouvrage perdu que le texte exact de ces fragments.

Mais comment les discerner avec quelque précision dans l'ensemble du commentaire, alors que les vingt citations de Geminus que l'on y rencontre auraient évidemment pu être beaucoup plus fréquentes encore, alors surtout que Proclus cite aussi tant d'autres auteurs dont on peut supposer qu'il possédait des écrits perdus pour nous?

Pour répondre à cette question, il convient tout d'abord que nous analysions rapidement le commentaire de Proclus, et que nous précisions la façon dont il l'a composé, les éléments qu'il y a mis en œuvre.

Il caractérise assez bien lui-même sa méthode en deux endroits. Dans l'un, au début de la seconde Partie du Prologue (p. 48), il nous dit que, d'une part, il prend Platon pour guide, que de l'autre il choisit dans les écrits d'autres auteurs ce qui lui paraît convenir à son sujet.

Au commencement du commentaire sur les propositions (p. 200), il annonce qu'il va choisir ce qu'il y a de plus intéressant dans les travaux antérieurs, en évitant leur prolixité excessive, car, dit-il ailleurs (p. 84), « nous sommes rebattus de petits lemmes et de cas différents ».

On doit donc, en thèse générale, distinguer deux sortes d'écrits dont Proclus s'est servi ou a pu se servir : d'une part, ceux d'un caractère théorique général, qu'il a compulsés pour son Prologue et le commentaire sur les définitions, les postulats et les axiomes, groupe dans lequel rentre l'Ouvrage de Geminus; d'autre part, les travaux spéciaux, utilisés pour les propositions, et dont le plus récent est le commentaire de Porphyre-Pappus. J'expliquerai un peu plus loin pourquoi je réunis ici ces deux noms.

La personnalité de Proclus n'apparaît guère en fait que dans le cas où il peut faire intervenir le nom de Platon ou bien celui d'Aristote, dont il ne semble au reste posséder que les mêmes Ouvrages que nous avons encore; alors, il se sent à l'aise et l'on peut

dire que c'est réellement lui qui parle, en interprétant les vieux maîtres à sa façon. C'est naturellement surtout dans le Prologue qu'il peut agir de la sorte, quoiqu'il ne se fasse pas faute de revenir ailleurs, parfois bien hors de propos, au divin Platon ou au surhumain (δαιμόνιος) Aristote. Mais enfin, il faut bien s'occuper de Mathématiques ou fournir des renseignements historiques; dès lors Proclus n'est guère qu'un écho plus ou moins fidèle d'auteurs comme Geminus pour les premières parties de son commentaire, comme Pappus pour la dernière.

3. Ainsi, exposons le plan du Prologue : Proclus commence par dire quel est, dans la théorie platonicienne des Idées, le rôle capital des Mathématiques; il disserte sur les principes communs à leurs diverses branches, principes qui, d'après lui, doivent fournir le sujet d'une Science générale; il recherche quelle faculté constitue le critérium en Mathématiques, et essaye de déterminer le caractère idéal et apriorique des objets de la Science. Puis vient l'éloge de celle-ci, la preuve de son utilité pour la Philosophie, la Théologie, la Physique, la Politique, l'Éthique, etc., et en même temps, la réfutation de l'opinion de ceux qui ne considèrent que l'utilité pratique; de là, après une conclusion générale, il passe à l'exposé de la division classique de la Mathématique suivant les Pythagoriciens [1], puis à la division adoptée en dehors de leur école ; c'est ce dernier morceau qui est emprunté à Geminus, nommément cité. Quelques pages sur l'unité de la Mathématique, d'après Platon, et sur l'origine de son nom terminent la première Partie du Prologue (p. 47).

La seconde s'ouvre par l'attribution à la Géométrie du rang suivant immédiatement celui de l'Arithmétique; puis Proclus se demande quelle est la nature de son objet; appartient-il au sensible ou à l'intelligible? La discussion, longuement poursuivie, conclut en faveur de l'intelligible, identifié d'ailleurs avec l'indivisible, contre l'opinion de Porphyre dans ses Σύμμικτα, *Mélanges*, Ouvrage perdu, mais que Proclus devait posséder et dont provient peut-être aussi une autre citation de Porphyre (p. 255, 14). Le

---

(1) Arithmétique, Musique, Géométrie et Sphérique. Cette division se retrouve partout, en particulier au début de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque.

caractère de la science géométrique est ensuite spécifié avec un peu plus de précision, et Proclus cherche à la distinguer nettement des autres, tout en accusant les rapports qu'elle a avec l'Arithmétique; mais bientôt il rentre dans de vagues considérations générales, que suit un éloge de la Géométrie au point de vue de l'utilité pratique; nous y rencontrons les anecdotes bien connues sur la trirème qu'Archimède fait mouvoir par la force d'un seul homme, et sur la solution du problème de l'alliage de la couronne.

Vient ensuite un morceau capital, emprunté tout entier : le résumé de l'histoire de la Géométrie jusqu'à Euclide, suivi de détails particuliers sur ce dernier. Empruntées aussi sont les observations qui suivent sur la signification des mots *élément* et *élémentaire* d'une part, de l'autre sur la différence entre les théorèmes et les problèmes, car ces observations citent une série d'auteurs anciens, de Ménechme à Posidonius, que Proclus ne possède certainement pas tous. Au contraire, la distinction, intercalée entre ces observations, des trois genres de principes en Géométrie : hypothèses (définitions), postulats et axiomes, distinction faite suivant les principes d'Aristote et en opposition à la terminologie bien connue de l'école stoïcienne, ne doit pas dériver d'un auteur déterminé; la fin du Prologue, sur l'objet du premier Livre d'Euclide et sa division logique en trois parties, se trouve dans le même cas.

4. Il suffit de parcourir cette analyse du Prologue pour reconnaître combien la distinction des morceaux empruntés y est en réalité facile; qui, dès lors, prendra la peine d'étudier ce Prologue et de se pénétrer des particularités du style de Proclus, arrivera sans grand'peine à faire, avec une exactitude suffisante, la même distinction dans le corps du commentaire; au sujet de celui-ci, il suffit de dire, pour toute analyse sommaire, que l'ordre du texte d'Euclide y est ponctuellement suivi, sans que cet ordre exclue au reste les digressions les plus capricieuses. Mais, si les morceaux empruntés sont facilement reconnaissables, il n'en reste pas moins à déterminer leur provenance réelle : à côté de Geminus et de Pappus, n'y a-t il pas d'autres sources? parmi les autres auteurs que cite Proclus, n'en est-il pas dont il pouvait avoir également les Ouvrages à sa disposition?

Pour éliminer, en tout cas, ceux qu'il ne connaît que de seconde main, on peut faire usage d'un critérium reposant sur l'emploi qu'il fait de la locution οἱ περί.

On admet d'ordinaire que, par exemple : οἱ περὶ Ποσειδώνιον (mot à mot : ceux autour de Posidonius) signifie tout simplement : Posidonius, au moins s'il s'agit d'une citation. C'est une opinion certainement très commode, mais qui n'est ni prouvée, ni probable (¹).

Si Posidonius était un personnage d'un roman d'aventures, comme en faisaient les Grecs du temps de Proclus, la locution dont il s'agit n'aurait jamais signifié Posidonius tout seul, mais Posidonius et son ou ses compagnons. Elle équivaudrait à la locution française : *nos héros*, pouvant d'ailleurs, j'insiste sur ce point, s'appliquer à deux personnages seulement; les exemples en sont faciles à trouver. Que dans Proclus, qui a des prétentions de style indiscutables, cette locution, relativement rare d'ailleurs, n'ait pas une signification spéciale, c'est ce qui me paraît absolument inadmissible.

On pourrait penser qu'elle veut dire dans l'exemple choisi : Posidonius et ceux qui partagent la même opinion; mais, comme nous la retrouvons plusieurs fois pour des démonstrations géométriques, elle ne peut signifier que : Posidonius et ceux qui reproduisent ce qu'il a dit. Or, si Proclus a vu le texte même de l'auteur original, la mention des autres est inexplicable, du moment où elle n'est pas une habitude constante; si, au contraire, il ne connaît le premier que de seconde main, il est naturel qu'il emploie parfois cette locution, sans qu'il soit nécessaire qu'il le fasse toujours. D'après l'analogie avec l'usage des romanciers grecs, la seconde main peut d'ailleurs être unique, et ce doit même être là le cas général.

(¹) Il est incontestable qu'en thèse générale on ne peut conclure de la manière dont tel auteur emploie cette locution à celle dont tel autre l'emploiera : des écrivains de la décadence ont pu s'en servir peut-être sans y attacher une signification particulière; mais que le plus suspect à cet égard l'ait fait réellement, il sera toujours permis d'en douter. Je me contente de citer un passage de Diogène Laërce (VII, 143) : « Le Soleil est un feu pur, comme le dit Posidonius au Livre XVII des *Corps célestes;* plus grand que la Terre, comme il le dit au Livre XVI du *Discours physique;* et aussi de forme sphérique, comme le disent οἱ περὶ le même. »

Ainsi, la locution en question doit signifier dans Proclus qu'il emprunte la citation; il lui était inutile de s'expliquer davantage puisque, en général, il nous est encore facile, comme on va le voir, de reconnaître l'intermédiaire.

5. L'application de ce critérium nous permet d'éliminer de la liste des auteurs que Proclus a dû utiliser directement :

1° Eudème (p. 419), l'historien des Mathématiques; toutes les données qui doivent originairement provenir de lui ont donc été fournies à Proclus, soit par Geminus, soit par Porphyre-Pappus, suivant la place qu'elles occupent;

2° Speusippe (p. 77 et 78), Ménechme (p. 78 et 254), Amphinome (p. 77 et 254), Zénodote (p. 80), Posidonius (p. 80), citations qui, à n'en pas douter, viennent de Geminus;

3° Apollonius (p. 100); les citations en proviennent soit de Geminus, soit de Pappus;

4° Philon (p. 266). Nous rencontrons encore (p. 305) un Philippe, cité d'après Héron, au sujet de l'énoncé d'un théorème; la citation de Philon rend très vraisemblable que, dans ce second cas, c'est encore de lui qu'il s'agit, et qu'au nom du disciple de Platon il faut substituer celui du mécanicien de Byzance, que ses travaux et l'époque de sa vie rapprochent naturellement de Héron.

5° Héron lui-même (p. 329 et 423). Il est à remarquer que son nom se trouve accolé une fois à celui de Porphyre, une autre à celui de Pappus. Il semble bien dès lors que la locution : οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον, par exemple, doive signifier : Héron dans Pappus. L'origine de son emploi est facile à reconnaître; après avoir écrit tout d'abord : οἱ περὶ Ἥρωνα, Proclus aura pensé qu'il n'indiquait pas suffisamment sa véritable source; il aura dès lors naturellement ajouté : καὶ Πάππον.

L'application du critérium indiqué nous donne ainsi des résultats très rationnels; elle n'exclut guère en effet que les auteurs les plus anciens et, en général, ceux dont l'utilisation directe par Proclus peut, à tous autres égards, soulever le plus de doutes : mais, que cette application soit absolument justifiée dans chaque cas particulier, cela ne peut être établi que par des discussions de détail; je n'ai pas à les aborder pour le moment, car, en fait, je ne propose qu'à titre provisoire le critérium en question.

J'ai identifié les commentaires de Porphyre et de Pappus; il est temps de m'expliquer à cet égard.

L'existence du premier de ces commentaires sur Euclide n'est à supposer que d'après le caractère des citations faites par Proclus; l'existence du commentaire de Pappus est, au contraire, amplement attestée, et nous savons qu'il s'étendait au moins jusqu'au Livre X des *Éléments* (¹); d'autre part, on sait que Pappus a repris et continué des commentaires de Porphyre sur Ptolémée (la *Syntaxe* et les *Harmoniques*); il semble donc avoir recueilli son héritage mathématique, et aussi bien le commentaire sur Euclide. Il importe peu dès lors que, dans les sources de Proclus, le travail de Porphyre se soit trouvé juxtaposé à celui de Pappus, ou bien que ce dernier ait entièrement refondu l'œuvre de son maître, tout en en mentionnant religieusement le nom, pour ce qu'il conservait de particulièrement intéressant.

6. Comme écrits que Proclus a pu utiliser directement, en dehors de ces derniers commentaires et de l'Ouvrage de Geminus, on doit, au contraire, faire entrer en ligne de compte :

A. Naturellement, tous ceux qui subsistent aujourd'hui, en y comprenant notamment l'opuscule *Sur les isopérimètres* de Zénodore (p. 165), publié par Hultsch dans son édition de Pappus. Il est inutile d'énumérer les autres mathématiciens; mais il est à noter que, comme philosophes, dans cette catégorie, en dehors de Platon et d'Aristote, nous ne rencontrons que Plotin (p. 21), pour une citation unique, relative à l'utilité des Mathématiques pour les jeunes gens; cette citation devait au reste être un lieu commun de l'École, car nous la retrouvons dans les commentaires d'Asclépios et de Philopon sur Nicomaque.

B. Comme ouvrages perdus, en dehors de celui de Porphyre déjà mentionné :

1° Un groupe mal défini, sans intérêt mathématique, représentant la tradition pythagoricienne dans son côté mystique, depuis

(¹) *Voir* Heiberg, *Studien über Euklid*, Leipzig, Teubner, 1882, p. 163.

Philolaos jusqu'à Théodore d'Asiné (?) (p. 130), et comprenant des écrits plus ou moins apocryphes comme l'ἱερὸς λόγος de Pythagore, les Oracles (λόγια), et les vers orphiques (p. 155). Il est facile de constater le peu de valeur qu'offrent en général ces sources pythagoriciennes, qu'il faut d'ailleurs bien distinguer de la tradition mathématique relative à l'École, telle qu'elle a été conservée d'après Eudème; il suffira de dire que notre commentateur y retrouve, donnée comme antérieure à Platon, la célèbre doctrine que toute connaissance n'est que réminiscence;

2° Un travail spécial du maître de Proclus, Syrianus (τῷ ἡμετέρῳ καθηγεμόνι, p. 129), sur la question de savoir si l'angle rentre dans la catégorie de quantité ou dans celle de qualité; Proclus en a extrait la plus grande partie de son commentaire sur la définition de l'angle (p. 121, 12 à 126). Syrianus, à son tour, avait cité son propre maître Plutarque et le mécanicien Carpos d'Antioche, ainsi qu'Apollonius et enfin Eudème de Rhodes pour un Livre écrit *Sur l'angle.* La citation d'Apollonius pouvait indifféremment provenir soit de Geminus, soit de Carpos, mais celle d'Eudème est plutôt à attribuer à ce dernier, car Geminus ne semble guère avoir, pour son compte, traité la question de Syrianus. Ainsi, la donnée relative à Eudème serait ici chez Proclus de troisième ou quatrième main, et aurait passé par des intermédiaires qui ne nous offrent que d'insuffisantes garanties. Il est donc permis de se demander si le prétendu Livre sur l'angle ne serait pas simplement un de ceux de l'*Histoire géométrique,* écrite par ordre de matières, suivant l'usage de l'École d'Aristote, et comme le laissent supposer les rares indices que nous avons à son sujet;

3° Le *Traité astrologique* du même Carpos d'Antioche (p. 241). Cet auteur y aurait, semble-t-il, attaqué Geminus sur la distinction des théorèmes et des problèmes. On pourrait ici croire à une citation empruntée à Pappus, qui a tiré, probablement de ce même ouvrage, un renseignement pour sa *Collection mathématique* (p. 1026); mais cette citation serait assez peu digne de lui.

Quant à celle d'Ératosthène (p. 43), elle est probablement de seconde main, sans qu'il y ait grand intérêt à rechercher l'intermédiaire. La proposition citée, que la proportion (géométrique) est le lien des Mathématiques, se trouvait de fait dans le Πλατωνικος d'Ératosthène, et on la retrouve dans les extraits assez étendus

qu'en a faits Théon de Smyrne (*Mus.*, 30, 31). Mais, au lieu d'être énoncée comme appartenant en propre à l'auteur, elle était seulement supposée possible chez Platon, dans une interprétation proposée pour un passage bien connu de l'*Épinomide* (991, e). Si Proclus avait réellement lu l'ouvrage d'Ératosthène, au lieu de n'en connaître qu'une citation imparfaite, il aurait sans doute tout autrement mené sa réfutation.

Enfin, pour la mention d'Énée d'Hiérapolis (p. 361), auteur d'un abrégé des *Éléments*, l'incertitude est complète, d'autant que l'on ne possède aucune donnée sur l'époque de la vie de ce géomètre.

7. Pour l'ensemble des autres écrivains cités dans Proclus, ou bien la présence de leurs noms dans des passages qui proviennent clairement, soit de Geminus, soit de Porphyre-Pappus, ou bien une analogie suffisante, atteste que les citations sont de seconde main. La seule difficulté peut être de savoir à laquelle des deux sources principales elles doivent être rapportées.

Cette difficulté n'existe guère en réalité que pour la partie du commentaire qui traite des postulats et axiomes; Pappus y apparaît déjà, tandis que Geminus y est cité jusqu'à sept fois. Tous deux ont également pu parler d'Apollonius et aussi de Héron d'Alexandrie. Ainsi on peut rapporter à Geminus la première citation d'Apollonius (p. 183), à Pappus la seconde (p. 194), quoiqu'elles concernent toutes deux le même point; mais la reproduction *in extenso* de la démonstration semble plutôt appartenir à un commentaire. Quant à Héron, je crois moins que Geminus ait utilisé ses travaux de Géométrie, car on ne retrouve dans le commentaire sur les définitions aucune de celles qui appartiennent en propre à Héron et qui sont pourtant assez caractéristiques (1).

Ce commentaire sur les définitions est en tout cas la partie où Proclus a le plus suivi Geminus, comme l'attestent et la phrase qui le termine et les autres citations qui s'y trouvent (2). Sur les propositions, Proclus ne pouvait plus naturellement prendre

---

(1) J'entends celles qu'on rencontre dans les Εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων (p. 44-46 de l'édition de Hultsch), et qui seules présentent un caractère sérieux d'authenticité.

(2) Pour cette partie de son commentaire, Proclus ne paraît guère avoir utilisé, en dehors de Geminus, que la tradition mystique pythagoricienne et le travail précité de Syrianus.

Geminus pour guide; cependant, il ne perd pas l'occasion de rappeler ce qu'il lui a déjà emprunté ou de tirer de lui quelque nouvelle remarque; son nom reparaît donc encore cinq fois, et il faut aussi lui attribuer la mention d'un certain nombre d'auteurs pour des questions que Proclus n'a pu trouver que chez lui.

Cette circonstance soulève un doute pour ce qui concerne la polémique de Posidonius contre les Épicuriens et particulièrement contre Zénon de Sidon, polémique dont il est parlé dans le commentaire sur les propositions; car, malgré les rapports entre Geminus et Posidonius, rien n'obligeait sérieusement le premier à parler de cette polémique, tandis que les premiers commentateurs d'Euclide ont pu croire intéressant de la rappeler.

Pour les autres mentions, la distinction est facile à faire. De Geminus directement proviennent, outre celles déjà indiquées, les citations de :

1° Xénocrate (p. 279), d'après une tradition déjà passablement altérée;

2° Ératosthène (p. 111), au sujet de Ménechme. Cette citation est empruntée évidemment à la lettre à Ptolémée, que nous a conservée Eutocius; de la même source dès lors, et non pas d'Eudème, doit provenir la donnée sur Hippocrate de Chios (p. 213), comme premier inventeur de la méthode apagogique;

3° Théodore le mathématicien (de Soles) (p. 110);

4° Hippias, Persée et Nicomède.

Au travail de Porphyre-Pappus doivent au contraire se rapporter, en dehors des extraits de Ménélaos et de Ptolémée, les données historiques que renferme le commentaire sur les propositions et qui sont empruntées à Eudème sur Thalès, Œnopide et les Pythagoriciens. Quant au renseignement sur les rapports entre Platon et Léodamas, l'origine en est moins assurée, car nous le retrouvons aussi dans Diogène Laërce.

J'arrête ici cette analyse du commentaire de Proclus, au point de vue des sources qu'il a utilisées, et en particulier de l'Ouvrage de Geminus; mais je dois répéter en thèse générale ce que j'ai déjà dit pour un point particulier : c'est que les résultats de cette analyse ne peuvent jusqu'à présent être proposés qu'à titre provisoire, et que la discussion définitive doit suivre l'examen approfondi des fragments historiques conservés par Proclus.

CHAPITRE II.

Sur l'époque où vivait Geminus.

1. F. Blass (*Dissertatio de Gemino et Posidonio*, Kiel, 1883) a récemment émis, sur l'époque où vivait Geminus, une opinion qui, si elle était vraie, pourrait changer singulièrement les conclusions à tirer des fragments conservés par Proclus ; qui, en tout cas, ne permettrait plus de dater au moins de l'ère chrétienne le commencement de la décadence des études géométriques.

D'après F. Blass, l'*Introduction aux Phénomènes* (Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα) de Geminus ne serait qu'un extrait de l'Ouvrage de Posidonius Περὶ μετεώρων ; les données que renferme l'*Introduction*, et qui semblent permettre d'en déterminer la date, ne seraient valables que pour le Traité originaire.

Le titre primitif de l'*Introduction* aurait d'ailleurs été : Γεμίνου ἐκ τῶν Ποσειδωνίου Μετεωρολογικῶν ἐξήγησις τῶν φαινομένων.

D'après l'opinion actuelle, on ne pourrait regarder Geminus que comme un simple plagiaire, car il donne exactement les mêmes preuves, etc., que Posidonius, ce que nous pouvons contrôler par Cléomède, qui certainement utilisait les écrits du philosophe d'Apamée. On ne peut supposer qu'un élève de ce dernier ait commis un tel plagiat, alors que son maître vivait encore.

Enfin le nom latin de Geminus prouverait qu'on ne peut le placer dans la première moitié du siècle avant l'ère chrétienne. Toutefois il a vécu avant Alexandre d'Aphrodisias (fin du IIe siècle après J.-C.), qui l'a cité.

2. Il est facile de reconnaître que ces arguments sont inconsistants. Le seul véritablement spécieux est le dernier, d'autant que l'on ne peut guère soutenir l'explication donnée jusqu'à présent pour ce nom, incontestablement romain, porté par un auteur grec à l'époque présumée ; Geminus n'est pas un nom de *gens* qui ait pu être donné à un affranchi.

Il y a là un problème historique assez obscur ; ce nom indique-

t-il réellement que notre auteur ait été citoyen romain, alors qu'il écrit assez purement le grec pour que sa nationalité hellène ne puisse guère être révoquée en doute? Comment aura-t-il pu acquérir ce droit de cité romaine? Mais, en fait, nous n'avons pas besoin de résoudre ce problème; il nous suffit qu'il existe, avec plus de singularités encore ([1]), pour le géographe Strabon, qui, lui aussi, porte un surnom romain, mais est foncièrement grec, au moins d'éducation. Nous allons voir en effet que l'on peut parfaitement admettre, avec les données sur la date de l'*Introduction*, que Geminus ait été contemporain de Strabon, c'est-à-dire ait vécu dans la seconde moitié du siècle avant l'ère chrétienne, plutôt que dans la première.

Geminus (éd. Halma, p. 43) dit que c'est une erreur des Grecs que de regarder la fête égyptienne d'Isis comme coïncidant avec la date du solstice d'hiver d'après Eudoxe, mais il ajoute que cette coïncidence avait eu lieu en fait 120 ans avant lui. Or la fête d'Isis durait du 17 au 20 athyr de l'année vague égyptienne de 365 jours, dont les époques sont bien connues, puisque c'est celle dont se sert Ptolémée. Le solstice d'hiver d'après Eudoxe n'est pas aussi bien déterminé, mais on peut regarder la date donnée par Boeckh (28 décembre de l'année julienne proleptique) comme exacte à un ou deux jours près. Suivant le jour de la fête d'Isis que l'on voudra faire coïncider avec la date de Boeckh, on trouvera une des seize années de 85 à 70 avant J.-C. ([2]). En conséquence, on indique d'ordinaire les quatre dernières années de cet intervalle comme correspondant à l'époque de la rédaction de l'*Introduction aux phénomènes*.

Mais cette conclusion suppose une précision qui n'existe pas en réalité dans la pensée de Geminus. Si on lit attentivement tout le long passage, d'ailleurs très clair, où il explique comment se déplacent les dates de l'année vague par rapport au solstice, on re-

---

([1]) Strabon parle souvent de la famille de sa mère, qui était une des plus nobles de l'Asie Mineure; on n'a aucun indice sur son père. On peut encore citer, comme du même temps à peu près, le père de l'apôtre saint Paul, juif de Tarse et citoyen romain.

([2]) Si Geminus, ce que je crois d'ailleurs douteux, comme je le dirai, écrivait à Rome et pour les Romains, il faudrait peut-être augmenter de quatre ans cet intervalle, car à Rome la fête d'Isis paraît avoir duré cinq jours.

connaîtra que le chiffre de 120 n'est nullement donné par lui d'après un témoignage chronologique, qu'il est au contraire conclu de ce que, au moment où il écrit, il y a un intervalle d'un mois entier entre les fêtes d'Isis et le solstice d'hiver, et qu'à raison de 30 jours au mois et de 4 ans pour le déplacement d'un jour, il y a donc *au moins* 120 ans que la coïncidence a eu lieu.

Or, qu'en parlant d'un mois entier il parle en nombres ronds, et en indiquant un minimum, c'est ce qui ressort nettement de ce qu'il dit ensuite :

« Après 4 ans, il y a eu une différence d'un jour, différence insensible pour les saisons de l'année ; après 40 ans, la différence a été de 10 jours, *ce qui n'est pas encore sensible.* Mais maintenant qu'il y a une différence d'un mois pour 120 ans, il faut un excès d'ignorance pour continuer à regarder la fête égyptienne d'Isis comme tombant au solstice d'Eudoxe. »

Ainsi Geminus s'en rapporte simplement à une constatation facile pour tous ceux qui pouvaient voir célébrer la fête d'Isis, au fait qu'il y avait au moins un mois entier de cette fête au solstice d'hiver ; la différence en plus n'allait sans doute pas à un demi-mois ; mais, d'après le texte même, il admet implicitement qu'elle pouvait être de 10 jours.

Nous devons donc conclure qu'en tout cas Geminus écrivait son *Introduction* après 70 avant J.-C., et que peut-être il ne l'écrivait pas avant l'an 30. Dans ce dernier cas, si l'Ouvrage est d'ailleurs de sa jeunesse, ce qui n'a rien d'impossible, il aurait à peine été plus âgé que Strabon, et il n'aurait pas été en fait l'élève de Posidonius.

Ce dernier point est le seul qu'on puisse, ce semble, concéder à F. Blass. Mais les raisons qu'il met en avant pour le rendre probable, n'en sont pas pour cela meilleures, ainsi que nous allons le voir.

3. Les motifs qu'on a eus pour mettre Geminus en rapport avec Posidonius sont fondés sur deux conjectures insuffisamment assurées, et sur un fait qui n'est nullement péremptoire.

Les conjectures étaient relatives à l'époque de la vie de Geminus, qui coïncidait avec celle où Posidonius professait à Rhodes, et au lieu de naissance de l'auteur de l'*Introduction* qu'on plaçait pré-

cisément à Rhodes, uniquement parce que ses déterminations astronomiques se rapportent en thèse générale à l'horizon de cette ville. Mais cela signifie seulement qu'il utilise les nombres donnés par Hipparque.

Le fait consiste en ce que Geminus avait écrit une *Exégèse abrégée des Météorologiques de Posidonius*. A tout le moins, Simplicius (vi^e siècle après J.-C.), dans son *Commentaire sur la Physique d'Aristote* (ed. Diels, p. 291-292), donne un long fragment de Geminus qu'il emprunte à Alexandre d'Aphrodisias (¹), et que ce dernier avait extrait ἐκ τῆς ἐπιτομῆς τῶν Ποσειδωνίου Μετεωρολογικῶν ἐξηγήσεως, titre qui donne lieu à controverse.

Le sens que j'ai admis, et qui me paraît le plus naturel, suppose qu'ἐπιτομῆς correspond à un adjectif et doit par suite être lu ἐπιτόμου. L'interprétation ancienne est que Geminus aurait fait un *Abrégé* d'un Ouvrage de Posidonius, intitulé *Exégèse des Météorologiques*. Boeckh a montré que cette interprétation est insoutenable, et il a admis que Geminus avait composé d'abord une *Exégèse des Météorologiques* de Posidonius, puis un abrégé de cette exégèse; dans cette hypothèse, il conviendrait d'introduire dans le texte l'article τῆς avant τῶν, comme l'a indiqué Diels. Enfin Blass a forgé, d'après ce texte, le titre qu'il propose comme ayant été remplacé par celui d'*Introduction aux Phénomènes* pour l'Ouvrage qui nous reste de Geminus.

Deux points doivent être, en tout état de cause, mis hors de doute : c'est que, d'une part, Geminus avait, dans le Traité cité par Simplicius, fait autre chose qu'abréger purement et simplement Posidonius, que d'un autre côté il s'y occupait de *Météorologie*, au sens actuel du mot, tandis que l'Ouvrage qui nous reste ne traite que de *Cosmographie*. En effet, on ne peut rapporter qu'au premier des deux écrits une citation que fait Alexandre d'Aphrodisias dans son *Commentaire sur les Météorologiques d'Aristote* (p. 118); après avoir rapporté l'explication de l'arc-en-ciel par Posidonius, il donne une preuve avancée par Geminus et Ælius (²)

(¹) Simplicius ne connaît pas autrement l'ouvrage en question.

(²) Οἱ περὶ Γέμινον καὶ Αἴλιον. Qui peut être cet Ælius? Le texte n'est certainement pas assuré; peut-être donnait-il un second nom porté par Geminus, suivant l'usage romain. — La preuve semble avoir mal été comprise par Alexandre d'Aphro-

pour montrer que ce phénomène est une simple apparence due à une réflexion de la lumière.

4. Le long fragment conservé par Simplicius pourrait faire illusion sur l'objet de l'Ouvrage de Geminus auquel il a été emprunté; ce fragment figurerait mieux en effet, ce semble, comme préambule à l'*Introduction aux Phénomènes,* que dans un Traité de Météorologie. Geminus y explique quels rôles différents jouent, dans l'étude des phénomènes célestes, l'*Astrologie* d'une part, la *Physique* de l'autre ; cette distinction, conforme aux principes d'Aristote, revient à peu près à celle que nous établirions entre l'Astronomie d'observation et de calcul d'un côté, et la Mécanique céleste de l'autre ; ainsi, au sens ancien, les lois de Kepler appartiendraient à l'*Astrologie,* la loi de Newton à la *Physique.* Il est à penser qu'après ce préambule, Geminus arrivait à distinguer l'objet propre de la Météorologie, et à remarquer que son étude rentrait dans la *Physique.*

Cette marche, un peu singulière à nos yeux, s'explique mieux si l'on observe qu'à proprement parler, chez les anciens, μετέωρα désigne, non pas les météores (plutôt μετάρσια), mais bien les corps célestes [1]. Mais Aristote avait donné au terme de *Météorologique* un sens spécial, que Posidonius a pu élargir (par exemple en y faisant rentrer la partie *physique* de la science du ciel), qu'en tout cas il n'a pas essayé de transformer pour le mettre en rapport avec l'usage de la langue. Ainsi il avait écrit deux Ouvrages bien distincts, que Diogène Laërce cite, l'un sous le titre Περὶ μετεώρων, relatif aux corps célestes [2], l'autre Μετεωρολογικὴ στοιχείωσις (*Éléments de Météorologie*), traitant des mêmes sujets que l'Ouvrage

---

disias. Geminus, d'après lui, aurait affirmé que l'arc-en-ciel paraît se rapprocher quand on marche vers lui, s'éloigner quand on marche dans la direction opposée.

(1) Comparez le titre de Cléomède : Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων (*Théorie circulaire des corps célestes*).

(2) Diog. L. II, 135. « Dans son Livre III *Sur les corps célestes*, Posidonius laisse subsister la surface (géométrique) à la fois pour l'intelligence et aussi en réalité (καθ' ὑπόστασιν) ». II, 144 : « Le Soleil est un feu pur, comme dit Posidonius dans son Livre XVII *Sur les corps célestes* ». Le paradoxe philosophique renfermé dans la première citation n'a rien d'étonnant d'après les doctrines stoïciennes.

d'Aristote ([1]). C'est sur ce second écrit de Posidonius que Geminus a dû composer le travail mentionné par Simplicius; mais il est bien difficile de croire avec Blass que cet écrit ait traité des *Phénomènes* célestes ([2]), objet de l'*Introduction*.

Le titre supposé par Blass pour ce dernier Ouvrage, d'Ἐξήγησις τῶν φαινομένων, est également inadmissible; car, pour les Grecs du temps, il aurait signifié, non pas *Explication des Phénomènes célestes,* mais bien *Commentaire* sur un Ouvrage portant le titre de *Phénomènes* ([3]), par exemple celui d'Aratus.

Au contraire, le titre actuel est tout à fait conforme aux habitudes de la langue grecque. L'*Introduction* est un manuel élémentaire, destiné aux étudiants dont l'éducation libérale doit comprendre au moins une teinture des sciences, utile également pour ceux qui veulent plus tard les approfondir. Des écrits de ce genre ont joué un rôle d'autant plus considérable que les Ouvrages proprement scientifiques, même les plus élémentaires, étaient composés sous la forme décousue d'un ensemble de théorèmes détachés. Ainsi, pour l'Astronomie, les premiers Livres à étudier étaient, au temps de Geminus, ceux d'Autolycos de Pitane, les petits Traités qui nous restent d'Aristarque de Samos et d'Hypsiclès, les *Phénomènes* d'Euclide, l'ancienne *Sphérique* (d'Eudoxe ?) dont F. Hultsch a démontré l'existence et qu'ont remplacée plus tard les écrits de Théodose de Tripoli et de Ménélaos. Il était évidemment au moins utile, pour s'intéresser à cette suite abstraite de déductions isolées, de commencer par lire préalablement une *introduction* comme celle de Geminus.

Il y a eu chez les Grecs des *Introductions arithmétiques* (Nicomaque), *harmoniques* (Ps. Euclide = Cléonide) et aussi *géométriques* (Nicomaque, II, 6, 1, ἐν τῇ γεωμετρικῇ εἰσαγωγῇ) ([4]), pour les trois autres branches de la Mathématique, suivant la division pythagoricienne; il devait y en avoir encore mieux pour l'Astro-

---

([1]) Diog. L. II, 138 : « Le monde est le système du ciel et de la terre, avec les objets naturels qu'ils renferment ». II, 152 : « Explication de l'arc-en-ciel ».

([2]) C'est là le sens constant de φαινόμενα, proprement : l'ensemble des observations astronomiques.

([3]) Le seul Ouvrage qui nous reste d'Hipparque s'appelle précisément Ἱππάρχου τῶν Ἀράτου καὶ Εὐδόξου φαινομένων ἐξηγήσεις.

([4]) Comp. aussi Héron, Εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων, ed. Hultsch, p. 44.

nomie, et, d'après le sens avéré du mot *Phénomènes*, le titre de l'Ouvrage de Geminus ne doit soulever aucun scrupule.

5. J'arrive maintenant à l'hypothèse fondamentale de Blass, que Geminus aurait copié dans Posidonius une donnée chronologique sans s'apercevoir qu'il fallait la modifier d'après l'intervalle de temps écoulé depuis la rédaction de cette donnée.

Pour pouvoir supposer une pareille inadvertance, il faut admettre que Geminus était un simple copiste, et même un copiste assez inintelligent. S'il s'agissait de Cléomède, avec lequel Blass le met en parallèle, la question pourrait peut-être se poser sérieusement. Pour Geminus, il en est tout autrement.

La similitude de son Manuel cosmographique avec l'Ouvrage de Cléomède, du moment où cette similitude ne va pas jusqu'à des identités de rédaction, ne peut aucunement prouver que le premier de ces Traités aurait été extrait d'un Ouvrage de Posidonius, comme semble l'avoir été au moins la plus grande partie du second. Le fonds de ce que renferment les écrits de Geminus et de Cléomède est en effet bien antérieur à Posidonius, et la ressemblance de ces écrits ne dépasse pas d'autre part celle que présentent, de nos jours, deux Traités élémentaires de Cosmographie. Evidemment aucun des deux auteurs n'est original; mais il y a au moins cette différence entre eux que les connaissances de seconde main qu'ils possèdent sont assez mal digérées chez l'un, bien coordonnées et élucidées chez l'autre. Le Traité de Geminus n'est certes pas parfait de tous points ; ce n'en est pas moins un des meilleurs écrits de l'antiquité, et nulle part il n'y commet une faute qui puisse le faire croire capable de tomber dans l'erreur supposée par Blass. Les autres fragments que l'on a de lui, dans Proclus, dans Simplicius, dans Eutocius, nous le montrent partout comme un auteur exact et judicieux.

Je dirai plus : si, dans son *Introduction aux Phénomènes*, Geminus ne cite jamais Posidonius, il ne faut nullement en conclure qu'il cherche à déguiser un plagiat, mais bien plutôt qu'il n'estimait pas assez haut les travaux cosmographiques du philosophe d'Apamée pour s'appuyer sur leur autorité. C'est ainsi que, pour la dimension de la Terre, il s'en tient aux évaluations d'Eratosthène et d'Hipparque, et ne mentionne pas la malheureuse cor-

rection de Posidonius ; c'est ainsi encore que, pour rapporter l'opinion que la zone torride est habitable, il va la rechercher à sa source, dans Polybe. Quant à ce qu'il dit de la fête d'Isis, il lui suffisait sans aucun doute des renseignements que lui donnait Eratosthène dans son *Octaétéride*, à laquelle il se réfère [1].

Posidonius, à la vérité, a eu, de son temps, une très grande réputation ; par l'étendue de ses connaissances, par la variété de ses recherches, il a cherché, pourrait-on dire, à être l'Aristote du stoïcisme. Mais la postérité a su faire la différence ; le monument élevé par le Stagirite subsiste presque entier ; de Posidonius il ne nous reste guère que des fragments épars dans Strabon et dans Cléomède, et le fait est que ces fragments ne lui font guère honneur.

Le plus considérable est le Chapitre I du Livre II de Cléomède, qu'il faut lui attribuer à peu près en entier, puisqu'il y est seul cité (au début), et que le style et la façon en tranchent assez singulièrement avec le reste de l'Ouvrage. Il s'agit de réfuter le paradoxe d'Epicure que, pour les dimensions du Soleil, il faut s'en tenir au témoignage immédiat de nos sens ; il est difficile d'imaginer avec quelle maladresse le stoïcien se tire d'une tâche aussi simple ; il entasse les arguments sans s'inquiéter de leur valeur, les expose de la façon la plus diffuse et termine par des injures grossières à l'adresse d'Epicure [2].

Qui étudiera sérieusement cette singulière polémique, arrivera à cette conclusion que Posidonius était peut-être plus susceptible que Geminus de commettre l'erreur supposée par F. Blass. La conjecture formulée par ce dernier ne repose donc sur aucun fondement sérieux.

6. En résumé, on doit maintenir au Ier siècle avant l'ère chrétienne l'époque de la vie de Geminus, sans qu'on puisse d'ailleurs,

---

(1) Eratosthène, dans les dix dernières années de sa vie, a pu voir le solstice d'hiver tomber au temps de la fête d'Isis.

(2) La reproduction dans Cléomède de ce curieux morceau est une preuve assurée qu'à l'époque où vivait ce dernier auteur, l'épicurisme était encore assez florissant. Letronne a donc certainement eu tort de le placer après le IIe siècle de l'ère chrétienne. (*Voir*, au reste, à ce sujet, l'article de M. J. Bertrand dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1884, p. 18).

pour la composition de l'*Introduction aux Phénomènes*, préciser une date, par exemple l'an 50, autrement que comme une moyenne entre les possibilités extrêmes.

Nous avons vu qu'on ignorait aussi, en réalité, si Geminus avait suivi les leçons de Posidonius, et s'il connaissait Rhodes autrement que par les Livres. Où vivait-il? on l'ignore de même ; si, dans son *Introduction*, il parle deux fois de Rome, et notamment y indique la durée du plus long jour, on ne peut en conclure qu'il y avait fixé sa résidence ; contre l'hypothèse qui l'y ferait habiter, on peut remarquer qu'il ne figure pas sur la liste si considérable des auteurs utilisés par Pline, et que ceux qui le citent ont vécu à Athènes ou à Alexandrie.

Où était-il né? Nous ne le savons pas davantage ; rien n'empêche, à la rigueur, de proposer son identification avec un Geminus de Tyr, auteur de trois Livres sur l'interprétation des songes, cités par Artémidore, écrivain du IIe siècle après J.-C., (II, 49). Les Stoïciens, Posidonius surtout, avaient déjà versé dans toutes les superstitions ; Geminus, qui admet au moins les principes de l'Astrologie judiciaire, pouvait bien croire aux songes ; il faut se rappeler que Pappus (*voir* Suidas) avait, lui aussi, écrit sur le même sujet (1).

Mais, en fait, il n'y a là que des conjectures insuffisantes ; la vérité est que nous ne savons rien qui concerne la personnalité de Geminus, sauf deux dates, éloignées d'une quarantaine d'années, et entre lesquelles a dû tomber celle de la rédaction de l'un de ses Ouvrages. Pour lui maintenir le rôle important qu'il joue, relativement à l'histoire des Mathématiques, cela suffit.

---

(1) Quant aux quelques pages sur les couleurs, dédiées par un Geminus au « très sage César », et publiées par Iriarte dans son *Catalogue des manuscrits grecs de Madrid*, p. 429-431, c'est un écrit datant des luttes entre les quatre factions du cirque à Byzance.

CHAPITRE III.

Le classement des Mathématiques, d'après Geminus.

1. La question du classement des Mathématiques dans l'antiquité peut, au premier abord, paraître étrangère à l'histoire de la Géométrie proprement dite; elle s'y rattache cependant par des liens étroits, car d'un côté la forme de démonstration géométrique étant la seule connue des anciens pour la Science, ils l'ont employée dans toutes les branches ; d'autre part, leurs écrits sur les applications renfermaient souvent des théorèmes ou des problèmes purement théoriques, dont plusieurs nous sont parvenus seulement par cette voie.

L'historien de la Géométrie grecque a donc à préciser, en faisant abstraction de la forme des Ouvrages mathématiques, ce qui était considéré comme Géométrie, ce qui au contraire était regardé comme appartenant à une autre branche de la Science. Il a aussi à dresser le bilan des Ouvrages conservés ou perdus, qui, quoique étrangers à la Géométrie au sens restreint du mot, intéressent son histoire, considérée au sens général. Il doit donc aborder cette question du classement des Mathématiques dans l'antiquité, et, eu égard à l'importance qu'elle présente par elle-même, il sera facilement entraîné à la traiter dans toute son extension.

Je donne ci-après la traduction de l'extrait de Geminus inséré par Proclus sur cette question dans la première partie du prologue du Commentaire sur Euclide. J'en rapprocherai ensuite les fragments relatifs au même sujet, qui se rencontrent dans les *Variæ collectiones* de l'édition de Héron par Hultsch, et je présenterai quelques observations sur les conclusions à tirer de ces rapprochements.

Extrait de Geminus

(*Proclus*, p. 38,1-42,8).

« Tel est le discours des Pythagoriciens et leur distinction des quatre sciences. Un autre mode de division de la Mathématique

a été adopté par d'autres, par exemple Geminus; ils considèrent, d'une part, celle qui concerne seulement les choses intelligibles; de l'autre, celle qui concerne les choses sensibles. Les choses intelligibles sont d'ailleurs pour eux les objets de contemplation que l'âme éveille en elle-même, en s'élevant au-dessus des espèces matérielles. La Mathématique qui traite des choses intelligibles comprend, d'autre part, d'après eux, deux parties qui sont premières et principales, l'Arithmétique et la Géométrie; pour les choses sensibles, il y a six parties, la Mécanique, l'Astrologie, l'Optique, la Géodésie, la Canonique, la Logistique.

» Quant à la Tactique, ils ne pensent pas qu'on doive la regarder, ainsi que d'autres le font, comme formant une partie de la Mathématique; seulement elle se sert tantôt de la Logistique, comme pour le dénombrement des troupes (1), tantôt de la Géodésie, comme pour les divisions et mesures des surfaces. Mais de même et *a fortiori*, ni l'Histoire, ni la Médecine ne sont des branches de la Mathématique, quoique les historiens emploient souvent des théorèmes mathématiques, alors qu'ils parlent de la situation des climats ou qu'ils calculent la grandeur des villes, leur diamètre ou leur enceinte (2), quoique les médecins éclaircissent aussi par des moyens semblables les questions qui sont de leur ressort. L'utilité de l'Astrologie en médecine est assez évidente chez Hippocrate, et chez tous ceux qui ont parlé des saisons et des contrées. De même donc, le tacticien se sert des théorèmes de Mathématiques, mais n'est pas un mathématicien pour ranger ses troupes en cercle (3), s'il veut faire paraître leur nombre aussi petit que possible, ou bien pour les disposer autrement afin de les faire paraître plus nombreuses, que ce soit en carré, en pentagone ou suivant quelque autre polygone.

» Telles sont les différentes branches de l'ensemble de la Mathématique. La Géométrie se divise à son tour en théorie du plan et en stéréométrie; car elle ne peut avoir une partie qui traite en particulier des points et des lignes, en tant qu'on ne peut former

(1) L. 16: Je lis λόχων au lieu de λόγων.

(2) L. 22-23 : καὶ διαμέτρους ἢ περιμέτρους est à supprimer comme une seconde leçon, au lieu de καὶ διαμέτρους ἢ περιβόλους.

(3) Preuve que la théorie des isopérimètres était bien connue dès longtemps avant Geminus.

avec ces éléments quelque figure qui ne soit ou plane ou solide. Or, en général, l'œuvre de la Géométrie consiste à construire des figures planes et solides, ou bien à comparer ou à diviser les figures construites.

» L'Arithmétique se divise de même en théorie des nombres linéaires, théorie des nombres plans, et théorie des nombres solides; elle considère en effet les espèces du nombre en elles-mêmes dans leur progression à partir de l'unité, la génération des nombres *semblables* et *dissemblables* [1], et les augmentations suivant la troisième dimension.

» La Géodésie et la Logistique sont analogues aux branches précédentes; seulement, au lieu de traiter des nombres ou des figures intelligibles, elles s'occupent des sensibles; car l'œuvre de la Géodésie ne consiste pas à mesurer le cône ou le cylindre, mais bien les monceaux comme cônes ou les puits comme cylindres; les droites qu'elle emploie ne sont pas intelligibles, mais sensibles, tout en étant d'ailleurs, par rapport aux intelligibles, des représentations tantôt plus exactes, comme les rayons du soleil, tantôt plus grossières, comme des cordeaux ou des règles.

» De même le logisticien ne considère pas les propriétés des nombres en eux-mêmes, mais sur les choses sensibles, d'où vient qu'il leur donne des noms d'après les objets qu'ils dénombrent, les appelant, par exemple, *mélites* (de pommes) ou *phialites* (de fioles). D'autre part, il n'admet pas, comme le fait l'arithméticien, qu'il y ait un minimum, à moins que ce ne soit pour quelque genre spécial; ainsi un homme, par rapport à une multitude, sera pour lui une mesure et comme est l'unité.

» A leur tour l'Optique et la Canonique dérivent de la Géométrie et de l'Arithmétique. La première emploie les lignes de vision et les angles qu'elles forment. Les subdivisions sont : l'Optique proprement dite, qui rend compte des erreurs dues à la distance dans les apparences des objets vus, par exemple de la convergence des parallèles ou de l'arrondissement des carrés en cercles; la Catoptrique, consacrée tout entière aux réflexions sur

---

(1) Des carrés et des hétéromèques $= n(n+1)$. *Voir* Jamblique sur Nicomaque (115,*d*). Ce rapprochement permet de considérer Geminus comme une des sources utilisées par Jamblique.

les miroirs de toute sorte, et à l'étude compliquée des images; la *Scénographique,* comme on l'appelle, qui montre à faire des dessins représentant des objets à différentes distances et différentes hauteurs, tout en conservant, pour la vue, la proportion et la forme de ces objets.

» Quant à la Canonique, elle étudie les rapports expérimentaux des longueurs harmoniques et recherche les divisions des *canons* ([1]), en employant toujours les sens et, comme le dit Platon, en mettant l'oreille avant l'intelligence.

» Vient ensuite ce qu'on appelle la Mécanique, partie de l'étude des objets sensibles et matériels; sous elle se rangent : l'*organopœïque,* pour la construction des engins propres à la guerre, comme ceux qu'inventa, dit-on, Archimède pour défendre Syracuse assiégée; la *thaumatopœïque* [construction d'artifices merveilleux], soit qu'elle emploie ingénieusement les mouvements de l'air, comme dans les Traités de Ctésibios et de Héron, soit qu'au moyen de poids (dont le mouvement est dû au défaut d'équilibre, et l'immobilité à l'équilibre, suivant les distinctions du Timée), ou encore par des fils ou fibres, elle imite les mouvements et les actions des êtres animés.

» La Mécanique comprend encore la connaissance de l'équilibre en général, et de ce qu'on appelle les centres de gravité; la *sphéropée* qui imite les révolutions célestes, que, par exemple, Archimède a traitée; en un mot, toute la *cinétique* de la matière.

» Enfin l'Astrologie s'occupe des mouvements du monde, des grandeurs et des formes des corps célestes, de leur éclairement et de leurs distances à la Terre, ainsi que de toutes les questions semblables; elle emprunte beaucoup à l'expérience des sens et, d'autre part, a beaucoup de rapport avec la *Théorie physique.* Elle a comme parties : la *Gnomonique,* qui s'occupe de la détermination de l'heure au moyen des gnomons; la *Météoroscopique,* qui recherche les différentes hauteurs et distances des astres et enseigne nombre d'autres théorèmes variés d'Astrologie; la *Dioptrique,* qui, au moyen d'instruments propres, enseigne les positions du Soleil, de la Lune et des différents astres ([2]).

([1]) Règles servant à mesurer les longueurs des cordes de la lyre.

([2]) P. 42, l. 4 : ε̄ ἀποχάς, c'est-à-dire ἀποχάς, corrigé en ἐποχάς qui doit être la

» Voilà ce que j'ai emprunté aux écrits des anciens sur les branches de la Mathématique [1]. »

3. Une seule objection peut être faite contre l'attribution à Geminus des renseignements fournis par l'extrait qui précède [2]. La dernière phrase de Proclus parle de plusieurs écrits où il aurait puisé; on peut, il est vrai, y comprendre ceux qui exposaient la doctrine pythagoricienne. Mais, au début de l'extrait, Proclus oppose précisément à ces derniers auteurs d'autres (parmi lesquels Geminus). N'a-t-il donc pas mélangé, dans cet Extrait même, ce qu'il trouvait dans plusieurs écrits différents? Quels pouvaient être ces écrits, en dehors de celui de Geminus?

Il n'y a pas en réalité à se préoccuper beaucoup de ces questions. Si Proclus avait possédé un auteur plus ancien que Geminus, il aurait sans doute fait appel à son autorité ou au moins cité son nom; quant à de plus récents, s'ils donnaient le même classement, c'est sans doute qu'ils l'avaient copié, et dès lors Proclus a dû de préférence recourir à Geminus, comme étant la véritable source.

Nous pouvons dans une certaine mesure contrôler cette assertion; il existe en effet un auteur qui, sur le classement des Mathématiques, a suivi Geminus; c'est Anatolius [3], celui sous le nom

---

véritable leçon. L'*époque* était, à proprement parler, le lieu du zodiaque occupé par une planète, ce qui revient à la *longitude astronomique*.

(1) Voici la citation unique de Geminus par Pappus (1026), citation qui se rapporte à la Mécanique :

« Tous ces effets ont été connus, dit-on, dans leur cause et dans leur raison, par Archimède de Syracuse; il est le seul homme connu qui ait su appliquer à toutes choses les dons variés de sa nature et de son génie d'invention, comme le dit Geminus le mathématicien dans son Livre *Sur le classement des Mathématiques.* »

(2) Il est inutile de faire remarquer quelques phrases comme celles où Platon est cité, et qui doivent être évidemment attribuées à Proclus lui-même, non à Geminus.

(3) Anatolius d'Alexandrie, d'après Eusèbe (*Hist. eccl.*, VII, 32,6), fut chrétien, mais en même temps un des hommes les plus signalés de son temps par ses connaissances en Arithmétique, en Géométrie, en Astronomie, comme en général dans la Philosophie hellénique; il occupa à Alexandrie la chaire de l'enseignement aristotélique et s'y trouvait lors de la guerre civile sous Gallien. Un peu plus tard, sous Aurélien, il devint évêque de Laodicée de Syrie. Rien n'empêche de le regarder comme ayant été le maître de Jamblique (d'après Eunape), et comme l'auteur des fragments qui portent son nom dans les *Théologoumènes arithmétiques;* car, au IIIe siècle, les chrétiens jouissaient à Alexandrie d'une to-

duquel sont inscrits les derniers fragments (79 — 86) des *Variæ collectiones*; ces fragments concernent : — 79, la philosophie dans son ensemble, théorique et pratique; — 80, l'origine du terme de Mathématique; — 81, la définition de la Mathématique; — 82, sa subdivision; — 83, les rapports de ses différentes branches; — 84, l'hypothèse, soit comme principe de la Mathématique, soit dans les autres acceptions du mot; — 85, l'importance attachée par Pythagore à l'Arithmétique; — 86, le but de l'Arithmétique.

Or il est facile de reconnaître, en thèse générale, sur ces divers fragments (1), que Proclus n'a pas utilisé Anatolius, quoiqu'il dût le connaître et le comprendre parmi ceux qui suivaient la classification de Geminus. Il y a donc probabilité suffisante que ce dernier est bien la source unique de l'Extrait que je viens de traduire.

4. J'arrive maintenant aux autres fragments des *Variæ collectiones* (5 — 12) qui ont été attribués à Geminus; ils concernent : — 5, la définition de la Géométrie; — 6, la notion du continu; — 7, les trois dimensions des corps; — 8, le but de la Géométrie; — 9, la Logistique; — 10, sa matière; — 11, la Géodésie; — 12, sa matière.

Il est évident à première vue que cette série semble faire suite aux fragments d'Anatolius, et il est à noter que le fragment 8 suppose comme antérieur un fragment analogue au 86 (2).

Pour examiner si cette apparence n'est pas illusoire, il faut considérer comment est constituée cette compilation des *Variæ collectiones*. Elle suit dans les manuscrits le Traité des *Définitions géométriques* du pseudo-Héron (3), commence par un fragment

---

lérance aussi complète que possible, et y vivaient en bons termes avec les païens; l'hostilité des deux religions ne s'est accusée qu'après les massacres de Dioclétien. Si le témoignage d'Eusèbe est exact sur la situation d'Anatolius comme professeur laïque à Alexandrie, Jamblique a très bien pu suivre ses leçons; d'autre part, un chrétien dans cette situation pouvait très bien compiler, pour un simple intérêt d'érudition, les écrits mystiques des Pythagoriciens sur les dix premiers nombres, et les réunir dans dix Livres d'*Introductions arithmétiques*.

(1) Comparer notamment le fr. 80 avec *Proclus*, p. 45.

(2) Je reviendrai sur l'origine de cette compilation particulière.

(3) Fr. 8. « Le but de la Géométrie est analogue à celui de l'Arithmétique, si

(1 — 2) qui dérive des *Métriques* de Héron, — énumération des figures qui y étaient traitées, — continue (3-4) par les postulats et les axiomes d'Euclide. Après la série attribuée à Geminus, viennent deux fragments (13 — 14) sur l'Optique, qui se retrouvent dans le petit Traité de Damianos (τοῦ Ἡλιοδώρου), et que Hultsch a regardés comme tirés des *Catoptriques* de Héron; suit un court abrégé (15) de la Notice historique de Proclus sur la Géométrie, puis (16 — 78), dans un désordre complet, de très nombreux fragments du Commentaire de Proclus sur Euclide (prologue et partie relative aux définitions et axiomes); après ces fragments mêlés de quelques rares intercalations d'origine inconnue ([1]), on rencontre la série provenant d'Anatolius, enfin, terminant le tout, la Notice historique sur l'Astronomie, extraite par Théon de Smyrne de l'Ouvrage du platonicien Dercyllidas.

Il semble bien, d'après ce résumé, que le compilateur a pu n'utiliser en fait qu'Anatolius et Proclus, prenant d'abord du premier ce qui lui paraissait intéresser la Géométrie, passant au second, puis reprenant dans le premier la partie antérieure qu'il avait sautée; de même, en faisant ses extraits de Proclus, il est souvent revenu sur ses pas.

Geminus a certainement dû traiter des mêmes matières que les fragments 5 — 14; mais Anatolius est dans le même cas ([2]), et s'il a utilisé Geminus, cela suffit pour expliquer les ressemblances de ces fragments avec l'extrait de Proclus.

Contre l'attribution à Geminus, on peut faire observer :

1° Que ce dernier ne semble point avoir cherché, pour définir

ce n'est qu'elle cherche à comprendre ce qui arrive à l'essence non pas discrète, mais bien continue. »

Fr. 86. « Le but que poursuit l'Arithmétique est principalement la contemplation scientifique (il n'y a pas de but plus grand ni plus beau), accessoirement la compréhension d'ensemble de tout ce qui arrive à l'essence discrète ».

([1]) Les plus importantes de ces intercalations, qui concernent les définitions des Livres V et X des *Éléments*, peuvent provenir de la partie perdue du commentaire de Proclus.

([2]) Il avait laissé, dit Eusèbe (VII, 32, 20), des *Introductions arithmétiques* en dix Livres et d'autres preuves de sa science, très nombreuses (VII, 32, 13); l'Ouvrage dont nous avons ici des extraits doit avoir été composé en dehors du Traité arithmétique; en tous cas, après avoir énuméré les parties de la science (fr. 82), il devait parler de chacune d'elles; il annonce même de plus amples détails.

les différentes sciences, des formules bien précises, comme celles des fragments en question ; du moins on ne retrouve rien de semblable dans Proclus, et ces définitions n'ont aucun caractère qui indique la main de Geminus (1) ;

2° Que le fragment 6, sur le continu, n'a guère de rapport avec le passage où Proclus (p. 278, 12-26) cite nommément Geminus sur la même question ;

3° Que le début du fragment 3 (qui porte d'ailleurs la mention ἔνιοί φασιν, quelques-uns disent) semble bien indigne de Geminus (2).

Je crois au contraire que le fragment sur l'Optique, quelle que puisse y être la part des *Catoptriques* de Héron, a passé par l'intermédiaire de Geminus, auquel Anatolius a pu l'emprunter plus ou moins fidèlement. Au moins j'y retrouve, dans la distinction entre l'hypothèse mathématique et les explications physiques relatives aux phénomènes de la vision, le même ordre d'idées que dans le fragment de l'*Exégèse des météorologiques de Posidonius*, que Simplicius nous a conservé. D'autre part, l'opinion que l'arc-en-ciel est dû à une simple réflexion, paraît avoir été propre à Posidonius et à Geminus.

Quant aux deux Notices historiques, il est possible qu'elles viennent aussi toutes deux d'Anatolius qui les aurait empruntées, l'une à Geminus, l'autre à Théon de Smyrne.

5. Quoi qu'il en soit, je vais maintenant aborder la comparaison, avec l'extrait de Geminus fait par Proclus, des fragments que je considère comme appartenant à Anatolius.

Il est clair que, dans la première énumération des branches de la

---

(1) Je me contente de traduire celle de la Géométrie (fr. 5 = scholie sur le *Charmide*, p. 512, 52). « La Géométrie est la science *théorétique* des grandeurs et des figures, ainsi que des surfaces et lignes qui les déterminent et les limitent, et avec leurs accidents (πάθη) et manières d'être (σχέσεις), les propriétés de leurs formes réalisées et les natures des mouvements qui les engendrent. On désigne sous le nom d'*accident* ce qui concerne les divisions ; sous celui de *manières d'être* les rapports des grandeurs entre elles et les situations, soit que nous les considérions en elles-mêmes, soit que nous les comparions réciproquement. »

(2) « Quelques-uns disent que les principes de la Géométrie sont les dimensions du corps mathématique. »

Science appliquée, Proclus n'a pas suivi l'ordre logique. Anatolius donne le suivant, qui concorde mieux avec l'ensemble de l'extrait : Logistique, Géodésie, Optique, Canonique, Mécanique, Astronomie, et remarque, ce qui paraît bien d'accord avec les idées de Geminus, que la Logistique et la Canonique ont plus de rapport avec l'Arithmétique, la Géodésie et l'Optique avec la Géométrie, que la Mécanique et l'Astrologie en ont également avec les deux sciences pures.

Anatolius, avec la Tactique, exclut d'autre part l'architectonique, la musique vulgaire, ce qui concerne les phases, enfin ce qu'il appelle τὸ μηχανικόν, c'est-à-dire la Mécanique appliquée.

Sur les deux derniers points, il paraît en désaccord avec Geminus; *ce qui concerne les phases* désigne évidemment les prédictions météorologiques liées aux levers et couchers apparents des étoiles, comme dans le petit Traité de Ptolémée : Φάσεις ἀπλανῶν, puisque les prédictions de ces levers et couchers sont certainement affaire de Mathématiques. Il y a donc là, semble-t-il, négation d'une possibilité de prédire le temps d'après un système auquel Geminus croyait dans une certaine mesure, et sur lequel il s'est longuement expliqué dans son *Introduction aux phénomènes*. Quant à la Mécanique pratique, Anatolius paraît en contradiction aussi bien avec l'extrait de Geminus qu'avec le Liv. VIII de Pappus.

En tout cas, la classification de Geminus, malgré son caractère plus empirique que rationnel, est plus satisfaisante que l'incomplète division des Pythagoriciens. Elle s'en distingue d'ailleurs non moins par l'adjonction de quatre branches non reconnues dans cette division, Logistique, Géodésie, Optique, Mécanique, que par le changement de nom de deux des sciences qui y figuraient; la Musique est réduite à la Canonique, c'est-à-dire à sa partie purement mathématique; à la Sphérique se substitue l'Astrologie, c'est-à-dire que la théorie de la sphère est conçue comme devant être constituée indépendamment de ses applications aux mouvements célestes, comme devant former une partie intégrante de la Géométrie. A la vérité, cette conception n'a pas été réalisée dans l'antiquité, mais elle n'en est que plus remarquable.

6. Arrêtons-nous aux branches étrangères à la Géométrie, et

considérons quels travaux pouvaient les représenter aux yeux de Geminus.

Pour l'Arithmétique, et sous ce mot, on doit entendre simplement, au sens ancien, l'ensemble des propositions préliminaires à ce que nous appelons la théorie des nombres, on ne peut penser qu'aux Livres VII à IX des *Éléments* d'Euclide. Si d'ailleurs on y joint le petit et médiocre opuscule de Diophante *Sur les nombres polygones*, lequel s'est substitué à un travail perdu d'Hypsiclès sur le même sujet, c'est tout ce qui nous reste de l'Arithmétique scientifique des anciens, dont l'enseignement était exactement modelé sur celui de la Géométrie. Des *Introductions*, analogues à celles de Nicomaque, existaient peut-être déjà, mais doivent être écartées ici.

Comme type de la Canonique, nous avons également un Traité d'Euclide, la *Division du canon* (Κατατομὴ κανόνος), conçu de même suivant le modèle géométrique ; ce Traité ne donne qu'une forme spéciale de la gamme, mais il n'est complété pour les autres par aucun des Ouvrages musicaux assez nombreux que l'antiquité nous a laissés et qui s'écartent tous plus ou moins de la forme euclidienne.

Pour la Logistique, au contraire, nous n'avons rien que des noms incertains et le mode de son enseignement nous est absolument inconnu. Si l'on devait le considérer aussi comme donné conformément au type géométrique, on pourrait citer l'opuscule d'Apollonius analysé dans le Livre II de Pappus, et qui posait des règles pour la multiplication des grands nombres; mais, quoique le mot de *Logistique* ait été repris au XIVe siècle par le moine Barlaam comme titre d'un Traité conçu suivant la même forme euclidienne, il est bien plutôt probable que chez les anciens la Logistique s'enseignait comme la Géodésie, c'est-à-dire sans démonstrations, sur des comptes et des problèmes numériques.

Le fait n'est pas douteux pour la Géodésie, puisque l'ensemble de la collection héronienne reproduit évidemment, comme forme, un type consacré, dont le premier modèle doit être cherché dans le papyrus mathématique égyptien traduit par Eisenlohr. Or ce papyrus est bien plus une Logistique qu'une Géodésie; d'autre part, la collection héronienne renferme un certain nombre de questions

qui appartiennent proprement à la Logistique et qui n'en sont pas moins traitées sur le même type que les autres ([1]).

7. Le seul renseignement un peu précis sur le contenu d'une Logistique ancienne doit être cherché dans un scholie sur le *Charmide* de Platon (p. 512, 52), qui reproduit avec une importante addition le fr. 9 des *Variæ collectiones* et doit donc être regardé comme provenant de la même source, c'est-à-dire d'Anatolius. Je donne la traduction de ce scholie avec celle d'un autre fragment d'Anatolius sur la Logistique.

« *Sur la Logistique*.

(V. C. 9 — Scholie sur le *Charmide*). — « La Logistique est la théorie qui traite des dénombrables et non des nombres; elle ne considère pas ce qui est réellement le nombre, mais suppose ce qui est un comme unité et ce qui est dénombrable comme nombre (ainsi 3 pour la triade, 10 pour la décade), et y ramène les théorèmes de l'Arithmétique. Elle examine donc, d'une part, ce qu'Archimède a appelé le *problème des bœufs*, de l'autre, les nombres *mélites* et *phialites*, les uns sur des fioles, les autres sur des troupeaux ([2]); de même, pour les autres espèces de corps sensibles, elle considère les quotités et prononce comme pour des objets absolus (τέλεια).

([1]) On peut notamment citer :

1° Les méthodes attribuées à Pythagore et à Platon pour la formation des triangles rectangles en nombre (*Héron*, p. 56-57) :

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2, \quad \text{si } n \text{ est impair (Méthode de Pythagore)};$$

$$n^2 + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right]^2, \quad \text{si } n \text{ est pair (Méthode de Platon)}.$$

2° Le problème de la citerne alimentée par deux tuyaux (p. 194).

3° Les problèmes d'Analyse indéterminée 78 et 79 du *Liber geeponicus* (p. 218-219).

([2]) Le mot μῆλον signifie soit *pomme*, comme *mouton*; mais les problèmes ont dû plutôt porter en principe sur des pommes. Dans les *Lois*, *VII* (819, *b-c*), Platon conseille, d'après l'exemple des Égyptiens, l'emploi effectif de pommes et de fioles pour exercer les enfants à résoudre des problèmes numériques.

(Scholie sur le *Charmide.*) — « Elle a : comme matière tous les dénombrables; comme parties les méthodes dites *helléniques* et *égyptiennes* pour les multiplications et les divisions, ainsi que les additions et décompositions des fractions, ce par quoi elle recherche les secrets des problèmes qu'offre sa matière en ce qui concerne les triangles et les polygones. Elle a pour but ce qui est utile dans les relations de la vie et dans les affaires, quoiqu'elle semble prononcer sur les objets sensibles comme s'ils étaient absolus. »

(V. C. 10). *Quelle est la matière de la Logistique?*

« C'est, a-t-on déjà dit, tous les dénombrables. Comme il peut y avoir dans cette matière un minimum analogue à l'unité de l'Arithmétique, elle se sert de l'un comme minimum des objets homogènes sous une même pluralité. Ainsi elle pose un homme comme indivisible dans une pluralité d'hommes, mais non pas absolument; une drachme comme indivisible dans une pluralité de drachmes, tandis qu'elle se divise en tant que monnaie. »

8. Je n'insiste pas sur les rapports entre ces fragments et le passage correspondant de l'extrait de Geminus par Proclus ; il est évident qu'Anatolius a suivi Geminus dans une certaine mesure; malheureusement on ne peut déterminer exactement jusqu'à quel point il a pu s'en écarter [1].

Je relève avant tout la distinction entre les méthodes égyptiennes et helléniques pour la multiplication et la division ; avant le travail d'Eisenlohr sur le papyrus mathématique égyptien, on se serait en vain demandé en quoi consistait cette distinction. Aujourd'hui on peut conjecturer que les méthodes égyptiennes ne sont autres que celles du papyrus, c'est-à-dire pour la multiplication, la duplication successive avec sommation, pour la division un procédé tout aussi grossièrement élémentaire.

La méthode hellénique doit être au contraire celle de la multiplication figure par figure [2], d'après une table des produits apprise par cœur, avec le procédé inverse pour la division. Si cette

---

[1] La question serait particulièrement intéressante pour l'authenticité du fameux *problème des bœufs* d'Archimède.

[2] Toutefois, en commençant par les ordres les plus élevés; le système inverse, le nôtre, n'offrait pas, avec la numération écrite des Grecs, d'avantages décisifs.

conjecture est exacte, il y a là une preuve sérieuse que les Grecs avaient, pour les calculs, des aptitudes aussi grandes que pour la Géométrie, car leur invention, si simple qu'elle soit, n'en constitue pas moins un progrès immense.

Les « additions ou décompositions de fractions » se rapportent évidemment au calcul des suites de quantièmes, que les Grecs avaient empruntées aux Égyptiens pour représenter les fractions, et qu'ils ont conservées jusqu'au xive siècle, à côté du mode de représentation moderne, lequel constitue également une invention grecque.

Après ces quelques mots sur les parties essentielles et primitives de la Logistique, le fragment du scholie passe aussitôt à la désignation du genre des questions les plus complexes qu'elle abordait. Dans les problèmes sur les triangles et les polygones [1], nous ne pouvons méconnaître la matière des questions de Diophante sur l'analyse indéterminée ; l'existence de Livres, antérieurs au père prétendu de l'Algèbre et traitant des mêmes sujets, est donc bien constatée ; car le fragment est évidemment d'une date antérieure aux *Arithmétiques*, quoique Diophante ait pu être contemporain d'Anatolius.

Dans le même ordre de questions rentre évidemment aussi le *problème des bœufs* d'Archimède indiqué plus haut comme l'infranchissable limite des efforts du logisticien. Quant à la lacune que semble offrir le fragment pour ce qui concerne les problèmes du premier et du second degré, elle se trouve comblée par l'indication des nombres *mélites* et *phialites*.

9. Avec ces faibles indices, nous pouvons peut-être apprécier un peu mieux quel fut le réel degré d'originalité de Diophante.

Tout d'abord il a intitulé son Ouvrage Ἀριθμητικά, alors que la matière en avait été jusqu'à lui considérée comme appartenant à la Logistique. Cette innovation est plus qu'une simple affaire de mots ; elle révèle le sentiment très juste que la matière dont il

---

[1] Qui comprennent les carrés, peut-être omis par inadvertance du copiste. Les triangles doivent désigner, au reste, non seulement les nombres triangles $= \frac{n(n+1)}{2}$, mais aussi les triangles rectangles en nombres.

s'agit appartient à la science abstraite et primordiale et non pas à une science appliquée et concrète, que cette matière doit au moins être placée sur le même niveau que celle qui formait le sujet des spéculations de Nicomaque et de ses imitateurs.

Elle annonce un changement dans la forme et dans la méthode : en effet, les nombres de Diophante, sauf une seule exception ([1]), sont abstraits; avant lui, d'après les indications du fragment, ils étaient concrets. Les énoncés étaient donc, au moins en général, sous forme d'historiettes ([2]), comme on en rencontre déjà dans le papyrus mathématique égyptien, comme le seront plus tard les énoncés hindous, et aussi tant d'autres chez les Arabes et les mathématiciens du moyen âge; les noms des inconnues (*mélites, phialites, des bœufs*) leur étaient assignés sous forme concrète.

D'autre part, Diophante a sans doute, autant qu'il lui était possible, réagi contre l'habitude des logisticiens de donner des solutions sans démonstrations. Quoique trop souvent celles qu'il propose ne soient pas suffisamment expliquées, la marche analytique qu'il suit, est, en général, satisfaisante et réellement scientifique.

A la vérité, on ne peut dire que ces innovations dans la forme et la méthode lui soient dues; il ne se les attribue nullement, elles restent donc des inventions anonymes et déjà peut-être anciennes de son temps. Mais, à moins de supposer qu'Anatolius ait copié Geminus aussi servilement que l'a fait Proclus, ce qui, pour ma part, me paraît assez invraisemblable, il faut bien admettre que l'ancienne forme d'énoncés prédominait toujours de son temps, comme aussi le système d'exposer les solutions sans explication, système qui, chez les Égyptiens, les Hindous, les Arabes et au moyen âge, a généralement accompagné les énoncés sous forme concrète.

Diophante a donc trouvé devant lui, comme matériaux, de nom-

([1]) Le problème V, 33, celui dont l'énoncé est versifié.

([2]) Mises assez souvent en vers, comme le problème des bœufs, et aussi comme les épigrammes arithmétiques de l'*Anthologie,* dont une bonne partie peut d'ailleurs être d'une rédaction postérieure à Diophante; il n'en est pas moins clair que ce sont des problèmes analogues à ces épigrammes, c'est-à-dire du premier degré, qui sont indiqués par la mention des nombres *mélites* et *phialites*.

breux problèmes et même des plus complexes; mais, comme forme et comme méthode, il n'avait que de rares précédents; ce qui explique assez bien et le succès de son Ouvrage, et la disparition à peu près complète des traces de travaux antérieurs analogues.

J'ajoute que jusqu'à la fin de l'empire byzantin (¹), quoiqu'on ne discutât pas le titre d'*Arithmétiques* adopté par Diophante, on a toujours fait, entre la matière qu'il traitait et celle de l'Arithmétique théorique, une distinction profonde, revenant dans une certaine mesure à celle que Geminus établissait entre cette science et la Logistique. On n'a jamais reconnu le lien intime que la théorie des nombres devait établir entre les deux sujets.

Ainsi, dans un fragment inédit d'un commentaire anonyme sur Nicomaque, l'auteur, qui a commencé par copier Anatolius pour la définition de l'Arithmétique, pour sa matière et ses divisions, qui, par suite, nous répète un dernier écho de Geminus, continue comme suit :

« Le nombre est de deux sortes, soit mesurant, soit mesuré (ainsi 10 mesure, si c'est 10 unités; il est mesuré si c'est, par exemple, dix pièces de bois ou dix feux); le but du présent Traité (Nicomaque) est de discourir sur le nombre mesurant ; quant au mesuré, Diophante l'étudie dans les treize Livres de son Arithmétique (²). »

Ainsi il n'avait servi de rien à Diophante de ne traiter que des nombres abstraits; ils valaient toujours chez lui comme concrets; la distinction traditionnelle entre l'Arithmétique et la Logistique subsistait encore, alors même que le profond abîme qui les séparait à l'origine se trouvait désormais comblé de fait.

(¹) Par exemple : Rhabdas au XIVᵉ siècle (manuscrit 2428 de la Bibliothèque Nationale), Lettre à Tzavoukhe.

(²) Manuscrit 2372 de la Bibliothèque Nationale, fol. 55. — Τὸν γὰρ μετρούμενον ἀριθμὸν Διόφαντος ἐν τοῖς δέκα καὶ τρισὶν αὐτοῦ βιβλίοις τῆς ἀριθμητικῆς παραδίδωσιν.

CHAPITRE IV.

Les applications de la Géométrie dans l'antiquité.

1. Nous avons vu Anatolius et Proclus énumérer l'un et l'autre, d'après Geminus, quatre sciences empruntant à des degrés différents les théories de la Géométrie, à savoir : la Géodésie, l'Optique, la Mécanique et l'Astrologie.

Le terme de γεωδαισία, proprement *division des terres*, date de l'époque d'Aristote. Lorsque le mot de *géométrie*, appliqué tout d'abord, ainsi que son étymologie l'indique, aux opérations de l'arpentage, fut employé couramment pour désigner la science théorique créée par Pythagore, il fallut bien adopter un autre terme pour le remplacer dans sa première signification. Naturellement aussi, ce nouveau terme ne fut pas borné exclusivement à l'arpentage; on y comprit en général tout ce qui concernait les mesures pratiques de surfaces et de volumes, comme le témoigne le texte de Geminus.

Il nous reste, pour représenter cette branche de la Géométrie appliquée dans l'antiquité, un ensemble de documents suffisamment complet; c'est celui que forment les six à sept recueils de problèmes métriques qui portent le nom de Héron et dont F. Hultsch a publié le texte grec (1). Il est bien constant, d'ailleurs, que leur rédaction date de différentes époques postérieures à l'ère chrétienne, mais que, comme fond, ils sont empruntés à un grand Ouvrage réellement dû à Héron d'Alexandrie, dont les extraits ont été mis au courant des nouveaux besoins et des nouvelles mesures, ce qui est le sort général des Ouvrages destinés aux applications pratiques.

Comme Traité un peu plus relevé, nous avons celui *Sur la dioptre* (2), également attribué à Héron et dont l'authenticité ne

---

(1) En y joignant les *Mesures des marbres et des divers bois* de Didyme d'Alexandrie.

(2) Publié par Vincent dans les *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale*, XIX, 2, 1858.

paraît pas douteuse. A côté de la description d'un appareil très perfectionné, mais beaucoup trop compliqué pour avoir jamais été réellement mis en pratique (¹), à côté de la solution de la plupart des problèmes qui se présentent sur le terrain, on y trouve la plus ancienne démonstration connue pour la règle qui donne l'aire d'un triangle dont on connaît les trois côtés, suivant notre formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

A un niveau inférieur, au contraire, nous avons encore la collection des *Gromatici Veteres* (Berlin, 1848-1852) ou arpenteurs romains, qui, en dehors de leurs procédés traditionnels, ont fait de nombreux emprunts à des sources grecques dont quelques-unes sont perdues pour nous.

Je ne m'arrête pas à ces divers écrits, qui ont été l'objet d'analyses et de discussions approfondies, notamment de la part de M. Cantor, et auxquels j'ai d'ailleurs déjà consacré des études spéciales. Je remarque seulement que Héron n'avait pas adopté le terme technique de Géodésie. Son Ouvrage semble avoir été intitulé Μετρικά (c'est le titre, du moins, que lui donna Eutocius, et il est, certainement, très bien choisi), et ses deux parties principales paraissent avoir été désignées comme Γεωμετρούμενα et Στερεομετρούμενα (Géométrie et Stéréométrie).

Héron aurait donc au moins tenté de relever sa matière au rang de la Science théorique. Mais l'usage du mot de Géodésie était déjà trop consacré, par suite sans doute de l'existence d'Ouvrages antérieurs assez nombreux, pour que Héron réussît à cet égard ailleurs que chez les Romains. A vrai dire, ceux-ci, sous le nom de géométrie, n'ont jamais fait que de l'arpentage; le terme de *Géodésie* resta, au contraire, classique chez les Grecs, pour reparaître dans les temps modernes, à son tour élevé en dignité, et désignant désormais des opérations dont les anciens n'ont jamais eu la moindre idée (²).

2. Le Traité *De la Dioptre* donne lieu à une observation spéciale au point de vue de la classification des sciences. D'après un

(¹) Il comporte à la fois, de fait, un théodolite et un niveau d'eau.

(²) Je remarque que, d'après l'usage de la langue grecque, on doit dire *géodète* et non *géodésien* pour désigner l'ingénieur qui effectue ces opérations.

abrégé latin des *Catoptriques* de Héron, opuscule dont l'original grec est perdu et qui a été faussement attribué à Ptolémée (¹), l'ingénieur alexandrin divisait l'Optique en Optique proprement dite, en Catoptrique et en Dioptrique. Ce dernier mot n'a, au reste, jamais eu dans l'antiquité le sens qu'il a chez les modernes; il désignait ce qui concerne la visée des objets, et cela particulièrement au moyen de la *dioptre* qui consistait, à proprement parler, en une règle munie de deux pinnules percées de trous ou de fentes. Il est donc clair que Héron devait considérer comme faisant partie de l'Optique, sinon tout son Traité *De la Dioptre,* au moins la description de son instrument.

Nous voyons, au contraire, Geminus classer la Dioptrique comme subdivision de l'Astrologie; il est clair que l'instrument de Héron pouvait servir pour observer les astres; non seulement il en indique l'emploi dans ce but, mais encore c'est seulement alors que lui servent les graduations de ses cercles, puisque les anciens ne faisaient pas de Trigonométrie rectiligne. D'autre part, Geminus, dans son *Introduction aux phénomènes* (éd. Petau, 42 B), nous parle, pour vérifier le mouvement circulaire des étoiles, de dioptres qui doivent avoir été semblables à celle de Héron, c'est-à-dire avoir consisté en un théodolite dont l'axe fût susceptible de prendre une inclinaison.

Il n'en est pas moins vrai que le classement empirique de Geminus suppose, pour son temps, l'existence de Traités qualifiés de *dioptriques,* et spécialement consacrés à l'Astronomie. Plutarque (²) attribue de fait à Euclide un tel Ouvrage; mais, même si l'on regarde comme valable ce témoignage unique, ou si seulement on admet l'existence de traités de *Dioptrique* correspondant dans une certaine mesure à des éléments d'Astronomie pratique, une grave question s'élève.

Il est clair que l'instrument très compliqué de Héron a dû être précédé d'essais plus simples; en supposant une *dioptre* réduite seulement à la règle de visée montée sur un cercle divisé, à quelle

---

(¹) *Voir* à ce sujet Th.-H. Martin, *Recherches sur la vie et les Ouvrages de Héron d'Alexandrie*, Mémoire présenté à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, IV, 1854.

(²) *Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, éd. Didot, M. 1338,3.

époque cet instrument élémentaire a-t-il été connu des Grecs?

On ne fait souvent aucune difficulté pour le regarder comme connu d'Hipparque et même comme lui étant bien antérieur. Il convient d'opposer à ce préjugé les considérations suivantes :

Toutes les positions d'étoiles antérieures à Euclide (comme celles d'Eudoxe) sont tellement erronées que l'on ne peut supposer qu'elles aient été observées directement.

Ptolémée attribue à Hipparque une *dioptre* toute spéciale; c'est une règle graduée avec une pinnule fixe et une pinnule mobile, les fentes des pinnules étant à différentes hauteurs. C'est le principe du *bâton de Jacob,* où l'angle est connu par sa tangente, ou estimé d'après des triangles semblables.

Si Ptolémée ne témoigne pas qu'Hipparque se soit servi de cet instrument pour des mesures effectives, mais seulement pour la comparaison des diamètres du Soleil et de la Lune à l'apogée et au périgée, l'emploi de cette *dioptre* semble lié à celui des mesures (chaldéennes?) de *coudée* et de *doigt* pour les petites distances angulaires des étoiles, mesures dont Hipparque se servait et qui ont passé des Grecs aux Arabes. D'autre part, on peut bien voir un instrument analogue dans la *dioptre* dont s'est servi un disciple d'Aristote, Dicéarque de Messine [1], pour mesurer les hauteurs des montagnes de la Grèce.

L'instrument principal d'observation d'Hipparque et de Ptolémée a été une sphère armillaire, sans ligne de visée; un anneau mobile (le cercle astrolabe) pouvait être placé de façon que son plan passât par l'astre observé; ce cercle, perpendiculaire à celui qui représentait l'écliptique [2] et qui était gradué, donnait immédiatement la position en longitude. Or c'est là le problème [3] que le texte de Geminus donne comme étant l'objet spécial de la *Dioptrique,* et l'on doit observer que, quoiqu'il n'y eût nullement de *dioptre,* Ptolémée se sert du mot διοπτεύειν pour désigner l'opération qui amène le plan du cercle astrolabe à passer par l'étoile.

---

[1] Théon de Smyrne (*Astronomie,* 3).

[2] Ce dernier cercle, également mobile, a d'abord été amené à coïncider avec l'écliptique par une observation semblable faite sur un astre de longitude connue.

[3] Il convient de remarquer que la détermination de la longitude des planètes était le point de départ des prédictions astrologiques.

On ne peut donc s'empêcher de penser que, pour Geminus, la *Dioptrique* devait être surtout représentée par des écrits sur des instruments autres que celui de Héron, quoiqu'il dût, sans aucun doute, connaître ce dernier.

3. Les remarques que je viens de faire, et celles que je vais ajouter sur les autres branches de l'Astronomie ancienne, n'ont pas pour but de trancher des questions historiques qui demanderaient une discussion proportionnée à leur importance; elles tendent seulement à les préciser et à montrer que l'histoire des observations pratiques est à refaire pour les origines. De quels procédés se servaient Hipparque et ses précurseurs? pourquoi prenaient-ils directement telle mesure plutôt que telle autre? Il y a là une série de nombreuses questions qui attendent une solution raisonnée; malheureusement, les documents que nous fournissent les ouvrages d'Astronomie ancienne sont totalement insuffisants, et il faudrait essayer de les compléter, soit par l'étude des écrits astrologiques, jusqu'à présent trop négligés, soit par les résultats des déchiffrements des écritures cunéiformes qui peuvent nous fournir quelques données sur les procédés d'observation des Chaldéens; car c'est de ces procédés que sont partis les Grecs.

Sous ces réserves, il me semble que la *Météoroscopie* de Geminus concerne spécialement l'observation des hauteurs lors des passages au méridien, observations dont se déduisaient les latitudes (1).

C'était donc principalement à cette partie de l'Astronomie que devait se rattacher l'emploi des tables des cordes de cercle qui remonte à Hipparque. Mais jusqu'à quel point la Trigonométrie sphérique était-elle déjà développée, il est difficile de le savoir, puisque le théorème fondamental qui sert de base à tous les calculs de Ptolémée ne se rencontre pas avant les *Sphériques* de Méné-

(1) L'instrument connu par les anciens sous le nom de *météoroscope* n'a été inventé que par Ptolémée. C'était une sphère armillaire ayant deux cercles (horizon et équateur) de plus que celle dont il a été parlé plus haut, soit neuf cercles concentriques. Si un cercle pouvait porter deux pinnules diamétralement opposées, on ne devait pas encore trouver là la véritable *dioptre*, c'est-à-dire la règle portant les pinnules. Les anciens astronomes ne semblent l'avoir adoptée que pour la face de l'astrolabe planisphère qui leur servait à prendre les hauteurs pour déterminer l'heure.

laos, à la fin du premier siècle de l'ère chrétienne. Quoique je le considère comme étant connu et pratiqué déjà par Hipparque, je dois remarquer que l'on ne possède à cet égard qu'une simple présomption, et que c'est une pure invention de Delambre (1) que son affirmation qu'Hipparque aurait dit avoir déterminé par la Trigonométrie sphérique les levers et couchers vrais des étoiles. Le texte du *Commentaire sur Aratus* ne dit rien de semblable, et quant aux déterminations qu'il donne, elles ne sont pas assez précises pour qu'Hipparque n'ait pu les obtenir par de tout autres procédés.

Au reste, Geminus semble avoir voulu, contrairement à la tradition, faire rentrer la Sphérique dans la Géométrie; il ne parle pas non plus d'une découverte géométrique très importante pour l'Astronomie, celle des projections stéréographiques. On la suppose connue d'Hipparque d'après la lettre de Synésius sur le don d'un astrolabe (2); mais ce témoignage n'est guère suffisant pour trancher cette question, qui se trouve liée à celle de l'invention de l'astrolabe planisphère.

Quant à la troisième branche de l'Astrologie énumérée par Geminus, la *Gnomonique*, nous n'avons absolument aucun Ouvrage grec. Cependant, il y avait déjà, de son temps, une littérature très nombreuse, et toutes les inventions possibles semblent avoir été déjà faites, si l'on en juge par le passage où Vitruve (IX, 9) les énumère sous des noms où, malheureusement, il est bien difficile de les reconnaître. Quelques cadrans solaires anciens, notamment sphériques, coniques et celui en forme de *jambon* (3), sont, en revanche, parvenus jusqu'à nous; mais c'est seulement en étudiant la Gnomonique des Arabes que l'on peut arriver à se former une idée précise de celle des Grecs.

4. Je reviens à l'Optique, que Geminus divise en Optique proprement dite, Catoptrique et Scénographique.

---

(1) *Astr. anc.*, I, p. 142-143.

(2) Cet astrolabe de Synésius n'est appelé ainsi que par un étrange abus de mots; c'est simplement une représentation de la sphère céleste, ou du moins de la partie visible, sur un cône, soit par projection, le sommet du cône étant au pôle boréal, soit par perspective, le sommet du cône et le point de vue étant sur l'axe du monde. La description de Synésius ne permet pas de décider; c'est par une inadvertance singulière que Victor Prou a admis une projection cylindrique.

(3) Cadran portatif. *Voir* Montucla, 2e édition, t. I, p. 724.

Je ne reproduis pas le très long fragment (13, 14) des *Variae Collectiones* (*Héron*, éd. Hultsch, p. 249-252), que je crois avoir été emprunté à Geminus par l'intermédiaire d'Anatolius ([1]), et qui se retrouve aussi dans l'*Optique* de Damianus; j'y relève seulement que, comme dans l'hypothèse admise par les mathématiciens traitant de l'Optique, les rayons visuels sont supposés partir des yeux pour aller à l'objet vu; il y avait, au reste, en dehors des trois branches énumérées, un ensemble de théories, distinctes au fond de l'Optique proprement dite, c'est-à-dire des lois de la vision, mais y rentrant en raison de la similitude de leur objet et de leurs hypothèses ([2]), et traitant de l'illumination et des ombres, des miroirs ardents et même des lentilles ardentes, très nettement indiquées. Les anciens s'occupaient aussi des points brillants (ἀγιλλεῖς) et de la réfraction. Mais cette dernière théorie était à peine constituée et se bornait à peu près à des discussions physiques; l'explication de l'arc-en-ciel (c'est-à-dire des essais impuissants comme celui des *Météorologiques* d'Aristote) rentrait de même dans la Catoptrique.

Si, de toutes ces théories accessoires, il ne nous reste aucun Traité, pour l'*Optique* proprement dite et pour la *Catoptrique*, nous possédons les Ouvrages attribués à Euclide; le second ne semble pas authentique, mais Geminus connaissait certainement une Catoptrique sous le nom d'Euclide, et ce Traité ne devait guère être supérieur à celui qui nous reste, car les hypothèses des anciens étaient trop insuffisantes pour leur éviter des erreurs même grossières. La Catoptrique de Héron n'en est pas exempte, quoiqu'elle soit, d'ailleurs, bien au-dessus de celle du Pseudo-Euclide. On doit y signaler la proposition géométrique citée par Damianus, que la ligne suivie de l'œil à l'objet par un rayon réfléchi sur un miroir est un minimum ([3]).

([1]) Il a déjà été traduit par Th.-H. Martin dans les notes de ses *Recherches sur la vie et les Ouvrages de Héron d'Alexandrie*.

([2]) Geminus paraît d'ailleurs les rattacher à la Catoptrique, en tant que la vision est indirecte pour ces phénomènes.

([3]) Le principe de l'égalité des angles pour la réflexion semble n'avoir été connu que peu de temps avant Euclide; Aristote dit que ces questions n'ont été élucidées que récemment, mais lui-même ne paraît guère avoir d'idées nettes, et ne parle nullement du principe d'égalité.

En somme, pour l'Optique, les anciens n'ont bien connu que les lois de la perspective et la théorie des miroirs plans; à cet égard, aucun progrès n'a été réalisé depuis Héron, par exemple dans les *Optiques* de Ptolémée [1] et de Damianus.

La perspective appliquée était appelée *scénographique*. D'après Vitruve (VII), le premier écrit sur la matière aurait été composé par un Agatharque, vivant du temps d'Eschyle, c'est-à-dire dans la première moitié du ve siècle avant J.-C. Anaxagore et Démocrite l'auraient ensuite traitée méthodiquement. Vitruve n'indique pas d'Ouvrages plus récents [2]; il ne devait cependant pas en manquer; en tout cas, nous n'avons aucun document sur le développement réel de cette application de la Géométrie.

Des autres parties accessoires de l'Optique, il nous reste encore des fragments d'Ouvrages relatifs aux miroirs ardents, question que la tradition fait remonter à Archimède, et qui a été, chez les anciens, l'objet de sérieux travaux [3]. Dioclès, antérieur à Geminus, avait écrit un Traité Περὶ πυρείων dont Eutocius a extrait la solution de deux problèmes (duplication du cube; partage d'une sphère en deux segments de rapport donné), dont on ne voit guère la liaison avec le sujet. Au vi^e siècle de l'ère chrétienne, Anthémius composa un Ouvrage *Sur des machines étonnantes*, dont il nous reste quelques débris précisément relatifs à cette question des miroirs ardents, et où l'on trouve, pour la première fois, la proposition sur l'égalité des angles de la tangente à la parabole avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe. Il y a donc, pour la date de la découverte de cette proposition, une question intéressante sur laquelle je me propose de revenir.

Pour le moment, je me contente de remarquer que, si la *Catoptrique* du Pseudo-Euclide se termine par un théorème où l'on essaye de prouver que, dans un miroir sphérique convexe exposé au soleil, le foyer sera au centre, une erreur aussi grossière ne

---

(1) La reconnaissance de la réfraction atmosphérique, dans les termes où la fait Ptolémée, n'a d'intérêt qu'au point de vue physique.

(2) Peut-être faut-il conclure de ce qu'il dit que la Perspective était surtout traitée par les architectes, comme elle le fut aussi à la Renaissance.

(3) Si la légende d'Archimède brûlant la flotte romaine est insoutenable, il est très possible que le Syracusain ait construit des miroirs ardents et même écrit sur ce sujet. On lui attribue des *Catoptriques* où il aurait parlé de la réfraction atmosphérique.

peut être attribuée aux géomètres antérieurs à l'ère chrétienne. A la vérité, leur hypothèse sur la marche des rayons visuels était pour eux une cause d'erreur inévitable dans la détermination de l'image sur les miroirs sphériques, mais pour le foyer des miroirs ardents cette cause d'erreur n'existait pas. D'autre part, il y a certainement eu des expériences faites, et la situation du foyer a dû être mieux reconnue.

5. Il ne me reste plus qu'à passer rapidement en revue les branches de la Mécanique, au point de vue des applications de la Géométrie.

En premier lieu, Geminus parle des engins de guerre. Si Archimède n'avait pas décrit ses célèbres inventions, la littérature, sur ce sujet, n'en était pas moins riche; elle remontait même avant lui, puisque Vitruve (X), qui donne d'ailleurs d'assez précieux détails, en général, sur la Mécanique grecque, cite deux ingénieurs d'Alexandre le Grand, Diadès et Charias.

Les écrits grecs de cette nature qui nous restent ont été réunis dans les *Mathematici veteres* de Thévenot (Paris, 1693); on pourrait croire qu'une bonne partie est du temps de l'empire romain; mais, si l'on écarte deux compilations sans importance réelle (1), tous les auteurs, sauf un, sont antérieurs à l'ère chrétienne (2).

Nous avons ainsi : d'un Biton, qui avait aussi écrit sur l'Optique, un Traité de la construction des engins de guerre et des catapultes, dédié à un des rois de Pergame (un Attale); de Philon de Byzance, contemporain de Ctésibios, deux Livres analogues, seul reste d'un Ouvrage beaucoup plus étendu; de Héron d'Alexandrie, les Βελοποιικά (*Sur les armes de jet*) et un Traité sur la *Chirobaliste* (3); enfin d'un Athénée, un Livre sur les machines de guerre.

Il est à remarquer que la solution du problème des deux

---

(1) Les fragments des *Cestes* de Julius Africanus, et le Traité anonyme sur la défense des place fortes.

(2) Le seul postérieur est Apollodore, qui vivait au IIe siècle, sous l'empereur Adrien. Il a traité des machines pour l'attaque des places fortes.

(3) Sorte d'arbalète restituée par Victor Prou [*Not. et extr. des Mss. de la Bibl. nat.* XXVI, 2 (1877) et XXXI (1884)].

moyennes proportionnelles d'après Philon, qu'Eutocius nous a conservée, figurait dans le premier Livre, aujourd'hui perdu, de son Ouvrage; celle de Héron se retrouve dans les Βελοποιικά que nous avons, mais il devait l'avoir insérée également dans ses *Introductions mécaniques*.

La seconde branche de la Mécanique, indiquée par Geminus, est caractérisée par les noms de Ctésibios et de son disciple Héron, et par son but qui est bien celui de deux des Ouvrages de ce dernier, aussi édités dans les *Mathematici veteres*, à savoir les *Pneumatiques* et les *Automates*. L'ingénieur mécanicien s'y propose bien moins de décrire des applications utiles que des objets d'amusement, de véritables jouets ou encore des artifices propres à entretenir la superstition. Ces deux Livres répondent exactement à deux des subdivisions de la *Thaumatopœïque* de Geminus; la troisième devait être représentée par un Livre de Héron, aujourd'hui perdu, Περὶ ζυγίων.

Geminus fait aussi allusion : à la théorie de l'équilibre et des centres de gravité, créée par Archimède dans ses Ouvrages qui nous restent sur l'équilibre des plans et dans son Traité perdu *Sur les balances* (¹); à un autre Traité, également perdu, du grand Syracusain, à sa célèbre *Sphéropée*, qui décrivait un appareil, mû par l'eau, où les mouvements célestes étaient représentés dans une sphère de verre; enfin à divers autres Ouvrages qui traitaient des mouvements.

6. En dehors des Traités que nous avons énumérés, c'est d'après le Livre VIII de la *Collection mathématique* de Pappus qu'on peut se faire l'idée la plus précise de la Mécanique des anciens et se rendre compte du rôle capital qu'y jouaient les recherches purement géométriques.

Pappus reconnaît d'ailleurs pour la Mécanique une division à peu près analogue à celle de Geminus; s'il place en première ligne l'art des *manganariens*, c'est-à-dire des constructeurs de machines servant à l'élévation des fardeaux (des moufles en particulier), il se réfère à cet égard aux anciens, et c'est bien là ce

(¹) Περὶ ζυγῶν, Pappus, 1068.

qu'au temps de Geminus, d'après Philon et Héron, on entendait proprement sous le nom de *mécaniques*. Pappus parle ensuite, comme branches suivantes, de la fabrication des engins de guerre et des machines proprement dites ([1]), de celle des θαύματα, enfin de la sphéropée. C'est bien la même série d'applications que donne Geminus, et, pour les θαύματα, Pappus fait aussi une subdivision analogue, en indiquant les Ouvrages précités de Héron; seulement, il cite aussi le Traité d'Archimède Περὶ ὀχουμένων (dont le texte grec est perdu) et celui de Héron sur les horloges à eau. Si ce dernier, que nous n'avons plus, pouvait avoir en réalité un but pratique ([2]), il est bien à remarquer que l'objet des admirables recherches d'Archimède sur les centres de gravité et les métacentres des segments de paraboloïdes flottant sur l'eau est de faire la théorie de petits jouets donnant des effets paradoxaux d'équilibre ou d'instabilité; à cet égard, ce Traité peut tout à fait être comparé aux Ζύγια ou aux Ouvrages analogues de Héron.

Le Livre VIII de Pappus, au reste, paraît à peu près en totalité emprunté à des sources antérieures à l'ère chrétienne ([3]), surtout à Héron d'Alexandrie, et les manuscrits se terminent par des extraits des *Mécaniques* de ce dernier; c'est là que se trouvent décrites les cinq puissances simples des anciens : le treuil, le levier, la moufle, le coin et la vis sans fin ([4]), tandis que plus haut Pappus avait donné la théorie d'une machine passablement complexe d'après le Βαροῦλκος ([5]) de Héron. C'est dans ces Ouvrages

---

([1]) P. 1024, 22. Il faut, je crois, entendre les machines de guerre, d'après l'usage de la langue. La parenthèse qui suit dans le texte, et d'après laquelle il s'agirait de machines pour l'épuisement de l'eau, me semble une interpolation malencontreuse, quoiqu'il y eût certainement des traités sur la matière. Mais Vitruve (X), qui essaye précisément de distinguer les machines et les engins (*organa*), appelle *engins* les machines d'épuisement.

([2]) Mais il semble bien, qu'au lieu de chercher à assurer une marche bien réglée des horloges, les anciens se soient surtout préoccupés d'obtenir des effets curieux, comme l'apparition de figures indiquant les heures, etc.

([3]) C'est dans son VIIe Livre que Pappus énonce, comme étant de son invention, le théorème ordinairement connu sous le nom de Guldin.

([4]) Ces extraits ne semblent pas l'œuvre de Pappus.

([5]) Tireur de fardeaux. Cette machine se compose d'un treuil, actionné par un équipage de cinq roues dentées, dont la dernière est commandée par une vis sans fin mue par une manivelle. Héron a inséré partie de son Traité sur cette machine dans son Ouvrage *Sur la Dioptre*. Le Βαροῦλκος existe encore en arabe.

perdus de l'ingénieur alexandrin comme dans ceux analogues de Philon que se trouvaient réunies les connaissances de Mécanique pratique des anciens, et, après eux, ces connaissances ne semblent guère avoir réellement progressé.

7. L'histoire de la Mécanique pratique dans l'antiquité ([1]) offre au reste une double obscurité. Un premier point ne sera probablement jamais éclairci d'une façon suffisante, car les documents manquent pour déterminer la date réelle des inventions fondamentales; il semble, toutefois, qu'elles doivent, en thèse générale, être regardées comme très antérieures à Archimède, sauf toutefois celle de la vis. Mais une autre question, non moins grave, est susceptible d'être élucidée, au moins dans une très large mesure, par l'étude approfondie des documents qui nous restent. Comment les anciens pouvaient-ils suppléer, dans la pratique, à l'insuffisance de leurs connaissances théoriques?

Pour ces dernières, leur histoire est suffisamment claire; les combinaisons de mouvements, au point de vue cinématique, ont été connues de très bonne heure ([2]), et les Grecs y ont déployé une grande ingéniosité; mais ils n'ont jamais précisé le concept de vitesse.

Le génie d'Archimède créa la théorie de la composition des forces parallèles, des centres de gravité et celle de l'équilibre des corps flottants. Mais l'antiquité n'alla pas plus loin; non seulement les premiers principes de la Dynamique ne furent pas soupçonnés, mais la composition statique des forces concourantes fut toujours ignorée, et l'explication des machines se borna à l'extension du principe d'équilibre du levier, qui est le point de départ des travaux d'Archimède, mais peut cependant avoir été reconnu avant lui, au moins empiriquement ([3]).

([1]) Je me borne à signaler sur cette matière les intéressants travaux de M. Rochas d'Aiglun.

([2]) Le plus ancien exemple est la distinction du mouvement propre des planètes et de leur mouvement diurne par l'école pythagoricienne; le système des sphères concentriques d'Eudoxe, pour représenter les mouvements célestes, offre des combinaisons déjà très savantes, et un passage de Platon (*Lois*, X. 893, *d*) prouve également que, dès son temps, la théorie examinait les cas les plus compliqués.

([3]) Il se trouve énoncé dans les *Mécaniques* d'Aristote, et l'explication du coin s'y trouve ramenée d'une façon d'ailleurs inexacte.

Il y a donc une singulière exagération à attribuer aux anciens un pressentiment effectif d'un principe comme celui des vitesses virtuelles. Il suffit de remarquer qu'ils étaient incapables de faire la théorie si simple du plan incliné.

Voici comment Pappus (p. 1057) traite cette question. Un corps de poids P est traîné sur un plan horizontal par une force Pf. Pour connaître quelle force sera nécessaire pour lui faire gravir un plan incliné sur l'horizon d'un angle α, il suppose que ce corps est une sphère, et, menant une verticale par le point de contact de cette sphère et du plan, il détermine, d'après le principe du levier, le poids qui, appliqué à l'extrémité du rayon perpendiculaire à cette verticale, empêcherait la sphère de descendre. Ce poids est $P\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot$ La force cherchée serait dès lors, d'après Pappus,

$$\left(P+P\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)f=\frac{Pf}{1-\sin\alpha}.$$

Un résultat aussi manifestement erroné, déduit de raisonnements en apparence géométriques, nous montre bien tout ce qui restait à faire avant Stevin et Galilée sur la question la plus capitale de la Statique. Si Archimède avait su ramener à des problèmes géométriques la recherche de l'équilibre dans le cas de forces parallèles, les essais faits après lui dans le même sens ont été des plus malheureux ; on n'en doit qu'admirer d'autant plus la puissance de son génie.

CHAPITRE V.

Le résumé historique de Proclus.

J'aborde maintenant le long fragment historique inséré par Proclus dans la seconde partie de son Prologue (p. 64-70); je vais donner la traduction intégrale de ce texte capital pour l'histoire de la Géométrie; j'examinerai ensuite à quelles sources Proclus a dû puiser en réalité et ce qu'il peut avoir tiré de son propre fonds.

a (¹). « Il convient désormais de parler de l'origine de la Géométrie dans la période actuelle; car, comme l'a dit le surhumain Aristote, les mêmes pensées sont venues à plusieurs reprises aux hommes suivant certaines périodes déterminées de l'univers, et ce n'est pas de notre temps, ou dans celui que nous connaissons par l'histoire, que les sciences se sont constituées pour la première fois; mais elles apparaissent et tour à tour disparaissent suivant les retours de révolutions célestes, dont on ne peut assigner le nombre pour le passé ni pour l'avenir. C'est donc pour la période actuelle seulement qu'il faut considérer les commencements des arts et des sciences.

b. « Nous dirons que, suivant la tradition générale, ce sont les Égyptiens qui ont les premiers inventé la Géométrie, et qu'elle est née de la mesure des terrains, qu'il leur fallait sans cesse renouveler à cause des crues du Nil qui fait disparaître les bornes des propriétés.

c. « Il ne faut pas s'étonner qu'un besoin pratique ait occasionné l'invention de cette science ou des autres, puisque tout ce qui est soumis à la génération procède de l'imparfait au parfait; il y a donc progrès naturel de la sensation au raisonnement, de celui-ci

(¹) La subdivision du texte en paragraphes marqués par des lettres est destinée à faciliter les renvois ultérieurs.

à l'intelligence pure. De même donc que la connaissance exacte des nombres a commencé chez les Phéniciens à la suite du trafic et des transactions auxquelles ils se livraient, la Géométrie a été inventée par les Égyptiens pour la raison que j'ai dite.

d. « Thalès, le premier, ayant été en Égypte, en rapporta cette théorie dans l'Hellade; lui-même fit plusieurs découvertes et mit ses successeurs sur la voie de plusieurs autres, par ses tentatives d'un caractère tantôt plus général, tantôt plus restreint au concret.

e. « Après lui, Mamercos [1] (Mamertinos?) frère du poète Stésichore, est mentionné comme s'étant enflammé pour la Géométrie, et Hippias d'Elis rapporte qu'il s'y fit de la réputation.

f. « Après eux, Pythagore transforma cette étude, et en fit un enseignement libéral; car il remonta aux principes supérieurs et rechercha les théorèmes abstraitement et par l'intelligence pure; c'est à lui que l'on doit la découverte des *irrationnelles* et la construction des figures du *cosmos* [*les polyèdres réguliers*].

g. « Après lui, Anaxagore de Clazomène s'occupa de diverses questions géométriques, de même qu'Œnopide de Chios, un peu plus jeune qu'Anaxagore; Platon, dans ses *Rivaux,* fait mention de tous deux comme de mathématiciens en réputation.

h. « Puis devinrent célèbres en Géométrie : Hippocrate de Chios, l'inventeur de la quadrature de la *lunule* et Théodore de Cyrène. Hippocrate fut le premier qui composa des *Éléments*.

i. « Après eux vécut Platon qui fit prendre aux Mathématiques en général, à la Géométrie en particulier, un essor immense, grâce au zèle qu'il déploya pour elles, et dont témoignent assez ses écrits tout remplis de discours mathématiques, et qui, à chaque instant, éveillent l'ardeur pour ces sciences chez ceux qui s'adonnent à la philosophie.

j. « Vers le même temps vivaient Léodamas de Thasos, Archy-

---

(1) La leçon des manuscrits est douteuse : Mamertinos est la forme donnée par Suidas; le fragment pseudo-héronien porte Mamertios.

tas de Tarente, et Théétète d'Athènes, qui augmentèrent le nombre des théorèmes et en firent un ensemble plus scientifique; Néoclide (plus jeune que Léodamas) et son disciple Léon, qui agrandirent singulièrement les connaissances antérieures, en sorte que Léon put composer des *Éléments* très supérieurs par le nombre et l'importance des démonstrations; ce fut aussi lui qui inventa les *distinctions* (διορισμοί), quand le problème cherché est possible et quand il est impossible (1).

k. « Eudoxe de Cnide, un peu plus jeune que Léon, et disciple des amis de Platon, augmenta le premier le nombre des théorèmes dits *généraux;* il ajouta trois nouvelles *analogies* aux trois anciennes (2), et fit progresser les questions relatives à la *section* (3), questions soulevées par Platon et pour lesquelles il fit usage des *analyses.*

l. « Amyclas d'Héraclée, disciple de Platon, Ménechme, élève d'Eudoxe et de Platon, Dinostrate, frère de Ménechme, perfectionnèrent l'ensemble de la Géométrie. Theudios de Magnésie s'acquit une réputation singulière dans les Mathématiques comme aussi dans les autres branches de la Philosophie; il rédigea d'excellents *Éléments* et rendit plus générales diverses définitions (4). Athénée de Cyzique vécut à la même époque et fut célèbre comme mathématicien, en particulier comme géomètre. Tous ces savants se réunissaient à l'Académie et faisaient leurs recherches en commun.

---

(1) Dans les ouvrages classiques, toutes les fois qu'un problème est astreint, pour être possible, à certaines conditions, celles-ci sont insérées dans l'énoncé du problème sous la rubrique : δεῖ δή (il faut que). Elles constituent ce qu'on appelle le διορισμός.

(2) L'arithmétique, la géométrique et l'harmonique; celles d'Eudoxe sont définies par les relations suivantes entre le moyen m et les extrêmes $a > b$:

$$1^\circ \quad \frac{a-m}{m-b} = \frac{b}{a}; \qquad 2^\circ \quad \frac{a-m}{m-b} = \frac{b}{m}; \qquad 3^\circ \quad \frac{a-m}{m-b} = \frac{m}{a}.$$

(3) La section en moyenne et extrême raison, d'après Bretschneider, dont l'opinion a, depuis, été généralement admise; la section des corps ronds, d'après l'interprétation antérieure que je montrerai être la plus probable.

(4) Le texte est douteux; peut-être : « rendit plus générales diverses propositions particulières ».

m. « Hermotime, de Colophon, poursuivit les découvertes d'Eudoxe et de Théétète, trouva diverses propositions des *Éléments*, et composa une partie des *Lieux*. Philippe de Medma [1], disciple de Platon qui le tourna vers les Mathématiques, fit des recherches suivant les indications de son maître, mais il se proposa aussi toutes les questions qu'il crut utiles pour la philosophie de Platon. C'est jusqu'à ce Philippe que *ceux qui ont écrit les histoires* conduisent le développement de la Géométrie.

n. « Euclide, l'auteur des *Éléments*, n'est pas beaucoup plus jeune ; il a mis en ordre divers travaux d'Eudoxe, amélioré ceux de Théétète, et aussi donné des démonstrations irréfutables pour ce que ses prédécesseurs n'avaient pas assez rigoureusement prouvé.

o. « Euclide vivait sous Ptolémée I, car il est mentionné par Archimède, qui naquit vers la fin du règne de ce souverain, et d'autre part on rapporte que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas pour la Géométrie de route plus courte que celle des *Éléments*; il eut cette réponse : « Il n'y a pas en Géométrie de chemin fait pour les rois ». Euclide est donc plus récent que les disciples de Platon, mais plus ancien qu'Ératosthène et Archimède, car ces derniers étaient contemporains, comme Ératosthène le dit quelque part.

p. « Euclide était d'ailleurs Platonicien d'opinion, et bien familier avec la philosophie du Maître : aussi s'est-il proposé, comme but final de l'ensemble de ses *Éléments*, la construction des figures appelées platoniciennes (*les cinq polyèdres réguliers*).

q. « Il y a de lui nombre d'autres Ouvrages de Mathématiques, écrits avec une singulière exactitude et pleins de science théorique. Tels sont ses *Optiques*, ses *Catoptriques*, ses Éléments de Musique, et encore son livre *sur les Divisions* [2].

---

(1) Μεδμαῖος doit certainement être lu au lieu de Μενδαῖος ; mais il ne semble pas qu'il faille distinguer ce Philippe de celui dit ordinairement d'Opunte. (*Voir* Boeckh, *Sonnenkreise der Alten* (Berlin, 1863), p. 34-40.

(2) L'Ouvrage géométrique copié, par Mahomet de Bagdad, dans le Traité de même titre qui fait partie de l'édition d'Euclide par Grégory.

r. « Mais on admire singulièrement ses *Éléments* de Géométrie, pour l'ordre qui y règne, le choix des théorèmes et problèmes pris comme éléments (car il n'a nullement inséré tous ceux qu'il pouvait donner, mais bien seulement ceux qui sont susceptibles de jouer le rôle d'éléments), et aussi la variété des raisonnements, conduits suivant tous les modes et produisant la conviction, tantôt en partant des causes, tantôt en remontant des faits, mais toujours irréfutables, exacts, et du caractère le plus scientifique. Ajoutez tous les procédés de la dialectique : la méthode de *division* (διαιρετική), dans la reconnaissance des espèces, celle de *définition* (ὁριστική), dans les raisons en essence, l'*apodictique*, dans les marches des principes au cherché, l'*analytique*, dans celles inverses, du cherché aux principes. Le même Traité nous montre encore, exactement distinguées, les diverses espèces des *réciproques*, tantôt plus simples, tantôt plus composées, en tant que la réciprocité peut avoir lieu, soit de la totalité à la totalité, soit de la totalité à la partie, ou inversement, soit enfin de partie à partie. Parlerons-nous de la teneur continue de l'invention, de l'économie et de l'ordre des antécédents et des conséquents, de la puissance avec laquelle il établit chaque point? Si tu veux y ajouter ou retrancher, tu reconnaîtras que tu t'écartes de la science, et te laisses emporter en dehors, vers l'erreur ou l'ignorance.

s. « Nombre de choses, à vrai dire, paraissent bien offrir la vérité, et découler des principes de la science, mais s'écartent de ces principes vers l'erreur et trompent les esprits superficiels. Euclide a donc aussi donné les procédés qu'emploie l'intelligence clairvoyante, et grâce auxquels il est possible d'exercer les débutants dans l'étude de la Géométrie, à reconnaître les paralogismes et à éviter les erreurs. C'est dans l'écrit qu'il a intitulé Ψευδάρια que ce travail a été accompli, qu'il a énuméré séparément et en ordre les divers genres de faux raisonnements, exerçant pour chacun notre intelligence par des théorèmes de toute sorte, où il oppose le vrai au faux, et où avec la preuve il fait concorder la réfutation de l'erreur. Ainsi ce Livre a pour but la purification et l'exercice de l'intelligence, tandis que les *Éléments* sont un guide sûr et accompli pour la contemplation scientifique des objets de la Géométrie. »

2. D'ordinaire, on reconnaît comme empruntée à Eudème la partie de ce fragment (*b-m*) qui concerne les temps antérieurs à Euclide; mais on admet que cet emprunt a été fait par Proclus, car il est trop clair qu'en tout cas nous n'avons pas le texte même d'Eudème, et l'on considère le commentateur d'Euclide comme ayant rédigé toute la partie (*n-s*) relative à l'auteur des *Éléments*.

Je vais essayer de montrer que le fragment tout entier appartient à Geminus, sauf les quelques légères altérations que Proclus a pu se permettre.

En premier lieu, j'appelle l'attention sur le paragraphe *a*; ce singulier hors-d'œuvre ne correspond pas à une doctrine assez invétérée chez Proclus, pour qu'on puisse croire qu'il l'ait écrit sans y avoir été au moins incité par quelque auteur qu'il avait sous les yeux. L'autorité d'Aristote ne doit pas non plus nous faire illusion, quoique le Stagirite dise bien quelque chose (*Metaph.*, XI, 8, 13) qui justifie suffisamment la citation de Proclus; ce n'est point là une doctrine du Lycée (¹), et un tel développement serait aussi singulier dans l'*Histoire géométrique* d'Eudème qu'il l'est dans Proclus. La croyance qu'indique ce paragraphe est au contraire bien connue comme faisant partie des dogmes stoïciens; nous devons donc soupçonner là la main de Geminus, sauf à laisser à Proclus la mention d'Aristote.

Passons maintenant à la partie du fragment qui concerne Euclide; les mentions précises d'Eudoxe et de Théétète (*n*), dont Proclus n'a certainement pas les ouvrages, indiquent assez que, pour ce qu'il dit d'Euclide, il a encore une autorité postérieure à Eudème.

La petite discussion chronologique (*o*), sur l'époque où vivait Euclide, ne peut être de Proclus, homme qui se contente toujours de s'en référer à la tradition; elle répond au contraire tout à fait aux habitudes du temps de Geminus, alors que la chronologie venait à peine de se fonder. Cette discussion nous prouve d'ailleurs une chose, c'est que son auteur, quel qu'il soit, n'en savait pas plus que nous sur les dates de la vie d'Euclide.

(¹) Aristote, comme Platon, qui admet de même des périodes successives de civilisation aboutissant à des cataclysmes, croit en tout cas que la race humaine n'est pas détruite et conserve des traces des connaissances antérieures.

Je ne m'arrête pas au renseignement (*p*) que Proclus aurait pu tenir d'une tradition quelconque, ni à la liste (*q*) incomplète des Ouvrages attribués à Euclide et que nous avons encore ([1]), mais je relève la digression (*s*) sur les *Pseudaria*. Évidemment Proclus en parle comme s'il avait l'Ouvrage entre les mains; qui peut croire cependant que de son temps un livre dont nous ne trouvons ailleurs qu'une seule mention ([2]) ait été, comme il semble le dire, encore suivi dans l'enseignement? Qui peut croire qu'un commentateur d'Euclide ait possédé un pareil Ouvrage, sans en rien tirer pour une seule remarque, même incidente? Il y a certes là une des preuves les plus palpables que le fragment est copié en son entier, et dès lors, à qui peut-il être emprunté, si ce n'est à Geminus?

Quant à l'éloge des *Éléments* qui précède (*r*), il suffit de remarquer que, dans le commentaire de Proclus, il n'est nullement à sa place; il se comprend très bien au contraire dans le plan que paraît avoir suivi Geminus, parlant des Ouvrages d'Euclide après avoir brièvement rappelé les travaux antérieurs, et commençant ainsi l'exposé des théories géométriques en relevant les mérites de l'œuvre classique où se trouvaient développés les éléments de ces théories.

3. Nous possédons dès maintenant des motifs suffisants pour penser que c'est à Geminus également que Proclus emprunte le résumé de l'histoire antérieure à Euclide, et que, s'il vient originairement d'Eudème, c'est Geminus qui a fait le premier extrait. Examinons donc ce résumé plus attentivement et cherchons à discerner, dans cette hypothèse, s'il n'y a pas d'autre trace nous indiquant que Proclus n'avait nullement Eudème sous la main.

Tout d'abord, écartons une question préjudicielle : on nous parle (*m*) de *ceux qui ont écrit les histoires*. Geminus avait-il, lui, à sa disposition d'autres historiens qu'Eudème?

([1]) Cependant, si les *Données* et les *Porismes* n'y figurent pas, c'est sans doute parce que Geminus se réservait d'en parler plus loin et qu'il l'avait fait après l'endroit où Proclus s'est arrêté; les *Divisions* ne méritaient pas une mention plus détaillée. Quant aux *Phénomènes*, leur omission ici ne peut étonner.

([2]) Alexand. Aphrod. in Arist. σοφιστ. ἐλέγχ. (Venise, 1520), fol. 25, B. Peut-être aussi le scholiaste du *Théétète* de Platon, 191 B.

On répète souvent, d'après Diogène Laërce (V, 48, 50), que Théophraste, comme Eudème, disciple d'Aristote, avait, lui aussi, composé quatre Livres d'*Histoires géométriques*, six d'*Histoire astrologique*, un d'*Histoires arithmétiques*. Mais, comme Usener l'a remarqué le premier, il est probable que cette donnée nous fournit seulement le nombre de livres historiques composés par Eudème, le seul sous le nom duquel soient citées de telles histoires, tandis que Théophraste n'est cité que comme auteur d'*Histoires physiques* (seize Livres), et que les quelques renseignements qui proviennent en outre de lui sur l'histoire astronomique doivent être empruntés à des écrits spéciaux, comme celui *sur le Ciel*, etc. Il suffit d'ajouter que le prétendu catalogue des écrits de Théophraste est formé de quatre listes successives par ordre alphabétique, dont la troisième et la quatrième, qui parlent des *Histoires mathématiques*, ne contiennent aucun ouvrage authentique de l'auteur des *Caractères*, mais seulement des écrits de la même école.

La mention que fait également Diogène Laërce (IV, 13) de cinq Livres Περὶ γεωμετρῶν (sur les géomètres), qu'aurait écrits Xénocrate, disciple de Platon et contemporain d'Eudème, n'est guère plus acceptable. Aucune trace ne se rencontre ailleurs d'un pareil écrit dont le titre peut être corrompu et à lire Περὶ γεωμετρικῶν (sur la Géométrie); d'autre part, il semble que la source de Diogène Laërce ait réuni sous ce titre commun cinq Livres distincts qui sont énumérés ensuite, et dont aucun n'a de caractère historique [1].

Mais, si Eudème est le seul historien de la Géométrie avant Euclide, comment Geminus aura-t-il pu employer le pluriel?

Il est aisé de voir que, quoique Eudème ait été la source principale, comme le témoigne assez l'exclusivisme de la liste des géomètres nommés [2], Geminus a dû chercher d'autres renseignements que les siens, sinon chez des historiens spéciaux qui

---

[1] Je remarque incidemment que le *Périgènes*, auteur d'un ouvrage sur les Mathématiques chaldéennes, cité par le scholiaste d'Apollonius (Nesselmann, p. 1-2), est évidemment Épigène de Byzance, dont parlent Sénèque et Pline.

[2] Notamment l'omission de Démocrite; il est bien peu croyable d'ailleurs qu'en dehors d'Athènes ou de l'Académie, il n'y ait pas eu un nom à citer à partir d'Hippocrate de Chios. La Sicile notamment a dû avoir des géomètres entre Mamercos et Archimède, quand elle a eu des astronomes originaux comme Ecphante et Hicétas.

n'existaient pas, au moins chez les écrivains qui pouvaient compléter Eudème, et cela suffit pour justifier l'expression dont il s'est servi.

On le soupçonne, quand on rencontre dans le fragment la tradition sur les débordements du Nil (*b*), qui remonte à Hérodote, et l'attribution aux Phéniciens de l'invention de l'Arithmétique (*c*). Sur ces deux points, en effet, le fragment s'écarte de l'opinion formelle d'Aristote (*Metaph.*, I, 1), qui voit dans les loisirs des prêtres égyptiens la cause déterminante de la formation première des Mathématiques. Platon admettait également et à juste titre que la science des nombres venait originairement de l'Égypte ; enfin, quand Jamblique nous dit que Thalès emprunta aux Égyptiens sa définition de l'unité, il nous fournit un renseignement qui doit venir plus ou moins directement d'Eudème et qui contredit également la prétendue origine phénicienne.

On reconnaît, d'autre part, une source particulière utilisée par Geminus, quand on voit citer (*e*) Hippias d'Elis à propos de Mamercos. Cette citation ne peut en effet appartenir à Proclus qui n'avait point certainement l'ouvrage d'Hippias ; si elle était d'Eudème, Geminus ne l'aurait pas sans doute conservée dans l'extrait, tandis qu'il aura voulu donner une preuve de son érudition, en parlant d'un géomètre omis par le disciple d'Aristote. Au reste, la mention du polygraphe Hippias devait probablement se référer à des vers du poète Stésichore, et n'a donc pas de valeur historique réelle.

La mention des *Rivaux* de Platon (*g*) conduit aux mêmes conclusions ; à la rigueur, elle aurait pu être faite par Proclus ; mais, comme le dialogue est apocryphe, cette citation n'est certainement pas d'Eudème, tandis que Geminus pouvait déjà la faire.

A la vérité, Eudème avait parlé d'Œnopide ; nous sommes donc conduits à supposer qu'il avait omis Anaxagore, et que c'est ce dernier que Geminus aura voulu placer, d'après le témoignage qu'il invoquait, à côté de l'astronome de Chios. Il est certain pourtant que ce témoignage est d'autant plus insuffisant qu'il concerne une discussion astronomique et non pas géométrique : nous n'avons pas de preuves valables en fait qu'Anaxagore se soit sérieusement occupé de Géométrie ([1]). Son Ouvrage sur la perspective, men-

([1]) Pas plus que les autres physiciens de l'école ionique après Thalès. L'ὕλης

tionné par Vitruve, pouvait ne pas réclamer des connaissances bien étendues, et le trait rapporté par Plutarque (*de Exsilio*, Ch. 17), qu'il composa dans sa prison une *Quadrature du cercle*, s'il n'es pas inventé à plaisir, ne prouve nullement qu'Anaxagore fût à la hauteur, comme géomètre, même des sophistes Antiphon et Bryson. En tout cas, sa conception du monde semble bien prouver que ses connaissances géométriques n'étaient pas au niveau de son originalité comme physicien.

Dans la suite du fragment, nous reconnaissons aussi dans le retour perpétuel aux *Éléments* la main d'un auteur qui recherche les origines de l'œuvre d'Euclide, qui lui est donc postérieur. C'est bien le même qui va rapprocher (*n*) de cette œuvre les travaux d'Eudoxe et de Théétète; il en a lu l'exposition détaillée dans Eudème et il résume ainsi son impression, de même qu'il l'a fait plus haut à plusieurs reprises. La façon dont il parle des *Lieux* à propos d'Hermotine (*m*) est bien aussi d'un écrivain au temps duquel ce sujet comprenait une matière considérable, tandis qu'au temps d'Eudème on commençait seulement à l'aborder.

Je me résume : les renseignements que fournit notre fragment pour les temps antérieurs à Euclide étaient épars dans les quatre Livres d'Eudème, composés sans doute par ordre des matières, suivant l'usage de son école. Si Proclus avait eu ces Livres entre les mains, il n'aurait point fait l'extrait que nous avons, et il nous aurait fourni en temps et lieu beaucoup plus de détails tirés d'Eudème que nous n'en trouvons malheureusement chez lui. Tout, au contraire, indique la main de Geminus, pour lequel cet extrait, avec le morceau qui suit sur Euclide, forme un ensemble rentrant naturellement dans le cadre qu'il s'était tracé; nous avons donc assez de probabilités pour pouvoir lui attribuer la totalité du fragment historique.

4. Il me reste à indiquer une conséquence importante qui s'ensuit relativement à un témoignage de ce fragment relatif à Platon et à Eudoxe (*k*).

γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν de Suidas sur Anaximandre doit sans doute se rapporter à la figuration de la Terre sur une mappemonde, qui fut l'œuvre du Milésien.

Bretschneider a pensé que la *section* dont il est parlé dans ce passage était la section d'une ligne en moyenne et extrême raison, et qu'Eudème avait en vue les théories du Livre XIII d'Euclide, sur les polyèdres réguliers, lequel débute précisément par des théorèmes où intervient cette division en moyenne et extrême raison et pour lesquels, à côté des démonstrations d'Euclide, les manuscrits en ont conservé d'autres, par analyse et synthèse. Ce seraient là, d'après lui, des débris des *analyses* d'Eudoxe.

Contre cette dernière conclusion, Heiberg a objecté très justement que ces démonstrations ne peuvent, philologiquement parlant, être regardées que comme l'œuvre d'un scholiaste très postérieur à Euclide. Mais la thèse générale elle-même, quoique très séduisante, surtout si l'on croit retrouver dans le fragment historique un texte d'Eudème, n'a guère plus de valeur que la conjecture qui s'y rattache.

A mon sens, il s'agit, comme on le croyait avant Bretschneider, de la section des solides [1] et des travaux qui ont préludé à l'invention des coniques. Mais j'ajoute que selon toute probabilité la donnée dont il s'agit appartient à Geminus, non pas à Eudème; que, d'autre part, elle est empreinte d'un caractère légendaire qui en diminue singulièrement la valeur.

La donnée qui précède immédiatement, relative à l'invention par Eudoxe de trois *analogies* nouvelles, excite tout d'abord nos soupçons; comme ces *analogies* semblent avoir toujours été considérées comme rentrant dans l'Arithmétique, il est improbable qu'Eudème en ait parlé à propos de la Géométrie; d'un autre côté, Jamblique les attribue tantôt à Eudoxe, tantôt à Archytas; la tradition n'était donc pas bien assurée à cet égard. Il est donc possible qu'ici Geminus se soit écarté d'Eudème; en tout cas, pour Eudoxe, il a cherché d'autres renseignements que ceux que fournissaient les *Histoires géométriques*.

Quant à l'invention des sections coniques, il est très probable qu'Eudème n'en avait point parlé. Si l'on considère que son Ou-

---

[1] L'emploi du singulier, quand d'ailleurs le texte serait plus assuré qu'il ne l'est, ne prouve rien. Il est au reste impossible de montrer un texte où il soit parlé d'une section proprement dite, à savoir celle en moyenne et extrême raison; un peu plus haut Proclus (p. 60, 17-19) s'exprime tout autrement.

vrage ne comprenait que quatre Livres, et que la quadrature des lunules se trouvait exposée, très longuement d'ailleurs, dans le second, il paraît impossible qu'un Traité aussi restreint comme dimensions et entrant dans autant de détails ait pu comprendre la théorie des coniques.

Cette conjecture est confirmée par le passage de Geminus que cite Eutocius (sur Apollonius) au sujet de l'histoire des coniques. Dans ce passage, Geminus a évidemment emprunté à Eudème ce qu'il dit de la façon dont les anciens démontraient l'égalité à deux droits de la somme des angles d'un triangle; mais, pour l'invention même des coniques, il semble réduit aux connaissances qu'il pouvait tirer lui-même des écrits antérieurs à Apollonius, et Eutocius, qui le cite pour réfuter l'opinion d'Héraclite [1], ne peut y trouver l'attribution de l'invention à un personnage déterminé.

Geminus cependant, mais dans un autre passage et d'une façon tout incidente (*Proclus*, p. 111), avait reconnu Ménechme comme l'inventeur des coniques, mais il s'appuyait expressément sur un vers où Érastothène parlait des triades de Ménechme, les sections du cône, et qui se trouve dans la lettre conservée par Eutocius (sur Archimède). Ce témoignage, postérieur à Eudème, n'est pas évidemment suffisant pour trancher complètement la question.

Enfin les solutions du problème de Délos, attribuées à Ménechme par Eutocius, ne paraissent pas remonter à Eudème, comme celle qui nous est restée sous le nom d'Archytas; est-il nécessaire d'ajouter que ces solutions peuvent très bien avoir été imaginées après coup, et qu'elles doivent nous être suspectes jusqu'à un certain point, surtout quand nous trouvons déjà dans l'une d'elles l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes?

Ménechme peut très bien avoir distingué le premier les trois coniques et établi leur équation au sommet, mais son maître Eudoxe peut, par exemple, avoir considéré la section plane du cylindre [2], et peut-être Geminus retrouvait-il dans un de ses écrits encore

---

[1] Nom douteux. Il avait écrit une vie d'Archimède, où il attribuait au Syracusain l'invention des coniques.

[2] Eudoxe, pour représenter les mouvements des planètes, avait étudié une courbe qui est l'intersection d'une sphère par un cylindre tangent antérieurement; Archytas avait déjà, dans sa solution du problème de Délos, au moins posé la question d'intersections encore plus complexes.

existants le nom antique de θυρεός (bouclier), appliqué autrefois à l'ellipse; cela suffisait pour lui attribuer d'avoir étudié les questions relatives *à la section des corps*.

Mais il est aussi très possible que Geminus ait forgé complètement sa donnée pour faire remonter jusqu'à Platon le principe de l'invention. Dans ce cas, Eudoxe, comme maître de Ménechme, était un intermédiaire naturel.

5. Dès le temps de Geminus en effet, avait cours, dans le milieu philosophique, la légende qui attribuait à Platon une part considérable dans le développement de la Géométrie. Ce que dit du Maître le passage (*l*) du fragment historique peut bien être considéré comme exact ou tout au moins comme représentant fidèlement le témoignage d'Eudème, qui devait déjà être quelque peu porté à s'exagérer le rôle de Platon comme promoteur de la Géométrie. Mais, quand nous arrivons au passage sur Eudoxe, la légende a pris corps, Platon a inventé l'analyse et soulevé les questions sur la *section*.

Sur la prétendue invention de l'analyse, je reviendrai ailleurs; quant à l'autre élément de la légende, il ne me paraît pas difficile d'en reconnaître l'origine : au Livre VII de la *République*, où il parle longuement des diverses sciences mathématiques, Platon constate que les théories géométriques concernant les solides sont encore à peine ébauchées. Si l'on considère que cependant la construction des cinq polyèdres réguliers était attribuée aux Pythagoriciens, que la découverte capitale d'Eudoxe sur le volume de la pyramide présente un caractère pratique qui ne permettait guère aux disciples de Platon de l'apprécier à sa juste valeur, une seule théorie se présentait comme représentant le *desideratum* du Maître, c'était celle qui, en tout cas, apparut vers la même époque, la théorie de la section du cône. C'est donc à elle que s'attache la légende et dès lors c'est à Platon lui-même qu'à tort ou à raison elle fait remonter l'origine de la question.

Dans ces conditions, nous pouvons d'autant moins nous prononcer sur la valeur réelle de cette tradition que, d'une part, elle s'appuie en fait sur des textes de Platon pour l'interprétation complète desquels les éléments nous font défaut, mais que d'un autre côté, si cette légende a peut-être un fond de vérité, nous

la voyons s'accroître bientôt de développements inadmissibles.

Qu'elle ait été rattachée dès l'origine au fameux problème de Délos, il est à peine utile de le faire remarquer, puisque, historiquement parlant, les sections coniques apparaissent tout d'abord comme appliquées à la solution de ce problème. A la vérité, dans sa lettre à Ptolémée, Ératosthène n'indique nullement que Platon lui-même se soit occupé de ce problème, mais dans son *Platonicien* (¹), il racontait déjà que c'était au chef de l'Académie que s'étaient adressés les Déliens, embarrassés par l'oracle, et il lui attribuait d'avoir dit : « Si le Dieu a fait cette réponse, ce n'est pas qu'il eût besoin d'un autel double, mais il a voulu reprocher aux Grecs de négliger les Mathématiques, il blâme leur dédain pour la Géométrie. »

La légende ira en grossissant de plus en plus; bientôt on attribuera à Platon une solution déterminée du problème, solution pratique d'une rare élégance au reste, mais certainement postérieure à Ératosthène; aux derniers temps, d'après Philopon, ce sera Platon qui aura ramené la duplication du cube à l'invention des deux moyennes proportionnelles, réduction que cependant Ératosthène attribue formellement à Hippocrate de Chios.

Mais arrêtons-nous à Plutarque. Il nous raconte (*Quest. convic.*, VIII, Qu. 2, Ch. 1. — *Vita Marcelli*, Ch. 14, § 5) que Platon a blâmé Eudoxe, Archytas et Ménechme d'avoir employé pour la duplication du cube des instruments et des dispositions mécaniques, d'avoir ainsi rabaissé jusqu'aux objets sensibles une science dont les spéculations doivent être exclusivement abstraites. Ce fut aussi lui qui sépara définitivement la Géométrie de la Mécanique et réduisit celle-ci au rôle secondaire qu'elle garda jusqu'à Archimède.

Ce récit de Plutarque est ordinairement accepté sans défiance : comment nier cependant qu'il ne soit forgé à plaisir d'après le caractère général de la philosophie de Platon et sans tenir aucun compte de ce qu'étaient les solutions d'Eudoxe, d'Archytas et de Ménechme? Par une singulière contradiction avec cette autre forme de la légende, la solution attribuée à Platon est, avant celle d'Ératosthène, la seule qui suppose l'emploi d'un instrument; celles

---

(¹) *Théon de Smyrne*, Arith., Chap. I.

d'Archytas et de Ménechme sont aussi théoriques que possible, et il n'y a pas à douter que celle d'Eudoxe, que nous n'avons plus, ne leur ressemblât sous ce rapport.

Si Diogène Laërce nous dit (VIII, 83) [1] qu'Archytas fut le premier à introduire des mouvements d'instrument dans une figure géométrique pour trouver la duplication du cube par l'intersection d'un cône, d'un cylindre et d'un tore, ce peut être vrai en tant que ces mouvements sont considérés comme purement abstraits; mais on répète simplement sous une forme encore plus inadmissible la donnée de Plutarque, si l'on entend que le Tarentin aura effectivement tenté de réaliser mécaniquement sa construction; il aurait, à ce compte, certainement tenu la gageure de trouver le procédé manuel le plus impraticable qu'il fût possible d'imaginer.

Ce que l'on peut seulement concéder, c'est que les surfaces considérées par Archytas rentraient dans celles qui, pratiquement et à l'aide du tour, pouvaient être réalisées avec autant d'exactitude que la surface plane et qui, dès lors, avaient droit, à tous égards, d'être introduites dans les spéculations géométriques. Si, d'autre part, Ératosthène, dans sa lettre à Ptolémée, nous dit que Ménechme a été jusqu'à lui le seul qui ait tenté une solution plus ou moins pratique, je ne puis, pour ma part du moins, supposer une description continue d'une conique pas plus qu'une construction par points, je ne puis penser qu'à une construction d'un cône et à sa section effective, pour obtenir par exemple une parabole d'un paramètre donné; mais, en fait, une pareille solution reste toujours purement théorique.

Le témoignage d'Ératosthène suffit, en tout cas, pour repousser les récits de Plutarque, mais la légende platonicienne n'en embarrasse pas moins d'un voile désormais impénétrable les origines de la théorie des coniques.

---

[1] C'est d'après une autre source évidemment que le même auteur indique Archytas comme le géomètre dont parle Platon à mots couverts, au Livre VII de la *République*, pour le proposer comme maître aux mathématiciens.

CHAPITRE VI.

La tradition touchant Pythagore. – Œnopide et Thalès.

1. Si le rôle de Platon en Mathématiques n'apparaît que comme un thème d'incertaines légendes, que dira-t-on de celui des anciens sages, de Thalès, de Pythagore? Quand bien même la tradition qui les concerne remonterait jusqu'à Eudème, quelle créance peut-elle mériter, alors qu'il s'agit de personnages antérieurs de deux à trois cents ans, et qui n'ont pas écrit, ou, du moins, sous le nom desquels l'antiquité n'a jamais connu que des œuvres apocryphes? A tout le moins, peut-on reconnaître à quelles sources puisait le premier historien de la Géométrie?

Un passage de Jamblique, mal interprété jusqu'à présent, me semble permettre de donner à ces questions, au moins en ce qui regarde Pythagore, une réponse plus satisfaisante qu'on ne pouvait l'espérer *a priori*.

(*De pythagorica vita*, 89). « Voici comment les Pythagoriciens disent que la Géométrie fut rendue publique. L'argent des Pythagoriciens fut perdu par l'un d'eux (1); à la suite de ce malheur, on lui accorda de battre monnaie avec la Géométrie, — et la Géométrie fut appelée *Tradition touchant Pythagore* (2). »

La curieuse donnée qui termine ce passage est une marque assurée de l'ancienneté de la source utilisée par Jamblique; cette donnée ne me paraît d'ailleurs susceptible que d'une seule expli-

(1) Ἀποβαλεῖν τινα τὴν οὐσίαν τῶν Πυθαγορείων. On traduit d'ordinaire : « Un pythagoricien perdit sa fortune. » Cette interprétation ne tient nullement compte de la construction de la phrase, ni des mœurs de l'époque à laquelle se rapporte la tradition. Les Pythagoriciens vivaient en communauté; le dépositaire de la bourse commune la perd, il faut recourir à des moyens extraordinaires. Voilà la légende; autrement elle ne se tient pas.

(2) Ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία, ce que Kiessling traduit : « Vocabatur autem Geometria a Pythagora *historia*. » Il semble avoir entendu : « Pythagore appelait la Géométrie *histoire* », interprétation insoutenable à tous les points de vue.

cation. Il a dû exister, sous le titre indiqué, un Ouvrage de Géométrie qu'Eudème a eu entre les mains et duquel il a tiré les renseignements relatifs aux travaux de l'École de Pythagore.

2. Examinons d'un peu plus près cette légende et voyons si nous pouvons en tirer quelque autre conclusion.

Il convient tout d'abord de remarquer que le même passage se retrouve dans le Livre de Jamblique Περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς (¹), avec une phrase intercalée avant la dernière :

« Les progrès des Mathématiques furent d'ailleurs dus ensuite surtout aux publications de deux hommes qui poussèrent plus avant, Théodore de Cyrène et Hippocrate de Chios. »

Cette intercalation, dans cette seconde rédaction, n'est qu'une glose qui rompt maladroitement le fil du récit. Mais cette glose, Jamblique l'emprunte évidemment à la tradition d'Eudème, et elle nous témoigne que le compilateur du IIIe siècle considérait l'Ἱστορία πρὸς Πυθαγόρου comme antérieure aux travaux d'Hippocrate. Il n'y a pas à douter que cette opinion ne fût aussi celle d'Eudème.

Il y a lieu, d'autre part, à examiner comment arrive, dans les deux passages de Jamblique, le récit relatif à la première publication de la Géométrie. Notre auteur vient d'exposer la différence des deux sectes qui reconnaissaient Pythagore comme Maître, les *Acousmatiques* d'un côté, les *Mathématiciens* de l'autre; ces derniers prétendaient garder seuls la véritable tradition; d'après eux, l'autre secte aurait, en réalité, été fondée par Hippasos, lequel aurait seulement pris comme point de départ l'enseignement exotérique de Pythagore. Cet Hippasos avait cependant, quant à lui, été initié aux doctrines réservées; mais, ayant divulgué la construction du dodécaèdre inscrit dans la sphère, il aurait péri en mer, en punition de son impiété, pour avoir voulu s'attribuer la gloire d'une invention qui appartenait à *Celui-là*; « car c'est ainsi qu'ils désignent Pythagore au lieu de prononcer son nom ». Suit le passage traduit plus haut, où l'on doit donc voir une légende propre à la secte des Mathématiciens.

Que cette légende soit inadmissible comme donnée première,

(¹) VILLOISON, *Anecdota græca*, II, p. 216.

pour ce qui regarde le secret observé dès l'origine sur les découvertes géométriques du Maître, il est à peine utile d'insister sur ce point. La *Tradition touchant Pythagore* n'aurait pas trouvé grand débit, si, jusque-là, la Science eût été complètement ignorée; cependant la légende est ancienne, et elle doit avoir un fond de vérité; en tout cas, on ne peut nier que, dès cette époque, la Géométrie ne fût en état de faire vivre ses adeptes; on ne peut guère douter qu'Hippocrate de Chios et Théodore de Cyrène n'aient tiré de l'argent de leur enseignement; c'est l'âge des sophistes, et les géomètres imitent les autres professeurs. La Science est déjà en honneur et la publication des découvertes de Pythagore est un travail lucratif; c'est le point qui mérite attention.

La légende concède au reste que, dès longtemps avant, des révélations partielles avaient eu lieu; tantôt il s'agit d'Hippasos et de la construction du dodécaèdre régulier, comme nous l'avons vu; tantôt (Jambl., *De vita pythag.*, 247) d'un affilié dont on tait le nom, et qui aurait enseigné aux profanes l'existence des quantités incommensurables; les Pythagoriciens l'auraient exclu de leur société et auraient, de son vivant, élevé son tombeau comme s'il était déjà mort; plus tard, les dieux l'auraient, lui aussi, fait périr dans un naufrage [1].

Si cependant on doit ajouter foi au récit d'Apollonius (Jambl., 254-264) sur les troubles politiques où succomba l'Institut pythagorique, l'École aurait eu, contre Hippasos, des griefs certainement plus graves que les révélations qu'elle lui reprochait. D'après ce récit, dont les circonstances ne présentent rien d'improbable, ce qu'on ne peut guère dire d'aucun autre, les discordes auraient, à l'origine, moins présenté le caractère d'une révolte populaire contre l'autorité de l'aristocratie pythagorisante que d'une scission entre les membres de l'École, dont les uns favorisent la démocratie, dont les autres maintiennent les principes conservateurs. Pythagore s'est retiré de Crotone à Métaponte, sans doute aux premiers symptômes où son autorité s'est trouvée compromise;

---

[1] Mais il y a d'autant moins de raisons de le distinguer d'Hippasos que, dans la Géométrie des *Éléments*, la théorie des incommensurables est intimement liée à celle des polyèdres réguliers, et que son objet semble être avant tout la définition des incommensurables que l'on rencontre dans la construction de ces polyèdres. On doit remarquer aussi que les points de doctrine en question sont de ceux que Pythagore n'a pas dû dépasser.

un des principaux chefs du parti aristocratique est ce Démocède dont Hérodote a raconté l'histoire, ce médecin fait prisonnier par les Perses, qui gagne la faveur de Darius, parvient à s'échapper et épouse la fille de Milon de Crotone. Mais, dans le parti populaire, se distinguent, avant même les démagogues Cylon et Ninon, des disciples du Maître, Hippasos en première ligne, et aussi un Théagès dont Stobée nous a conservé des fragments.

3. Pouvons-nous, d'après ces données, émettre quelques conjectures plausibles? Une grave difficulté subsiste, concernant la légende relative au secret imposé, dit-on, par Pythagore, pour les objets de son enseignement ésotérique. Quelle part de vérité peut contenir cette légende?

A priori, on devrait croire que si la prescription du secret a été effective, elle devait s'appliquer, non pas aux vérités géométriques [1], mais bien aux dogmes philosophiques. Tout au contraire, nous voyons ces dogmes, dans ce qu'ils ont de plus singulier, connus de très bonne heure (Xénophane, Héraclite, etc.), et c'est la révélation de découvertes mathématiques que la légende présente expressément comme l'impie violation des mystères réservés aux seuls initiés. Il nous faut donc bien reconnaître que les dogmes philosophiques de Pythagore, la métempsycose en particulier, étaient exotériques et que son enseignement réservé était essentiellement mathématique, sauf peut-être une partie mystique sur le caractère de laquelle nous ne serons probablement jamais bien renseignés.

Cette conclusion peut, ce me semble, recevoir une explication

---

[1] Une jolie légende (Jamblique, 21-25) nous montre Pythagore, au moins à Samos, jouant un rôle qui n'est guère celui d'un homme jaloux de sa science, cherchant au contraire à la répandre parmi ses concitoyens. Il prend un jeune homme qui gagne sa vie comme manœuvre, mais dont il reconnaît l'heureux naturel, et lui enseigne l'Arithmétique et la Géométrie en le payant trois oboles (le prix de la journée) par théorème qu'il apprend. Lorsque son élève est assez avancé, il feint d'être tombé dans la misère, et le jeune homme lui offre à son tour de payer trois oboles par chaque nouveau théorème. Cet élève se serait appelé du même nom que le Maître; il y a là une invention postérieure, dont le but a été d'attribuer à un personnage différent certains enseignements que la tradition reçue ne permettait plus de concilier avec celles unanimement reconnues comme de Pythagore. Son homonyme devint donc l'auteur du régime carnivore recommandé aux athlètes, tandis que le Pythagore de la tradition est un végétarien.

assez probable. Pythagore, en fait, n'a dû tenir secrètes ni ses doctrines, ni sa science. Mais, pour une raison ou pour une autre, il n'écrivit pas et préféra un enseignement oral. Dès lors, pour les Mathématiques qui ne sont pas accessibles à tous, son cours se ferma naturellement et le cercle de ses élèves devint d'autant plus facilement jaloux et exclusif qu'il les choisissait avec plus de soin.

Pour la Philosophie et la Physique qui n'était alors, elle aussi, qu'un tissu de conjectures, l'École produisit de bonne heure divers Ouvrages [1]. Tout disciple qui écrit pour son propre compte rompt nécessairement plus ou moins avec le Maître; il tend à devenir chef à son tour. Avec les liens très étroits de confraternité qui unissaient les Pythagoriciens, toute publication personnelle était donc acte de dissidence; mais elle n'avait point comme conséquence forcée une rupture violente; seulement, ceux qui prétendaient garder fidèlement la tradition du Maître dûrent maintenir qu'aucun écrit ne pouvait exactement représenter cette tradition, et ils se bornèrent dès lors à la transmettre oralement dans un petit cercle d'initiés, jusqu'au jour où elle se trouva tellement défigurée qu'il ne fût plus possible de maintenir l'observation de la règle [2].

Mais, pour une publication mathématique, la question était toute différente; il ne s'agissait plns d'opinions plus ou moins plausibles, prêtant plus ou moins à controverse, mais bien de vérités indiscutables, dont la découverte était un titre de gloire, certes aussi précieux à cette époque qu'il l'est de notre temps. Si donc Hippasos écrivit sur les plus hautes connaissances acquises au sein de l'École, s'il s'attribua des travaux peut-être faits en commun, et cela du vivant même de Pythagore, ce dernier dut en être vivement blessé, et les sentiments qu'il éprouva furent probablement partagés par la majorité de ses élèves. Les discordes qui éclatèrent à ce sujet purent être le motif de sa retraite à Métaponte; mais elles s'envenimèrent de plus en plus à Crotone, y prirent un caractère poli-

---

[1] Le plus ancien connu est celui d'Alcméon; plus tard Parménide et Empédocle pythagorisent plus ou moins; Hippasos paraît aussi avoir publié ses opinions sur la Physique.

[2] Il est incontestable que les doctrines de Philolaos, en particulier sa conception cosmologique, renferment nombre d'éléments étrangers et postérieurs à Pythagore.

tique et aboutirent à des guerres civiles prolongées dont on sait le résultat.

A la suite de ces événements, un groupe de Pythagoriciens exilés, se trouvant sans ressources, essaya de s'en créer au moyen de la publication des travaux mathématiques si malheureusement interrompus par les séditions ([1]). C'est ainsi, semble-t-il, que l'on peut rétablir le sens de la légende; en tout cas, on ne peut guère douter qu'Eudème n'eût entre les mains un Ouvrage relativement considérable, car les renseignements qui nous en proviennent sont passablement nombreux et circonstanciés.

4. Resterait à déterminer maintenant l'époque à laquelle remonte la publication de cet Ouvrage, appelé par Jamblique la *Tradition touchant Pythagore*.

Il n'y a guère de doute qu'on ne doive la placer avant Hippocrate de Chios; mais, d'après le caractère des découvertes attribuées par Eudème à Œnopide ([2]), il faut, très probablement, regarder comme antérieurs les écrits de ce dernier. Nous pouvons dès lors indiquer le milieu du ve siècle avant Jésus-Christ comme une date suffisamment approximative. La publication des travaux géométriques attribués à Pythagore semble ainsi tomber vers la fin des guerres civiles qui désolèrent la Grande-Grèce pendant près de cinquante ans et peu avant la pacification qui, sous l'arbitrage des Achéens, permit aux exilés de rentrer dans leur patrie, mais mit fin en même temps au rôle politique de l'association pythagoricienne ([3]).

Il est clair dès lors que le temps qui s'était écoulé depuis la

---

([1]) Je dis un groupe, car, d'après le récit d'Apollonius, les principaux Pythagoriciens, pendant leur exil, paraissent avoir surtout vécu comme médecins; Pythagore s'était beaucoup occupé de Médecine, et nombre de ses disciples l'imitèrent.

([2]) La solution des deux problèmes élémentaires : « Abaisser, d'un point donné, une perpendiculaire sur une droite donnée »; « Construire un angle égal à un angle donné, le sommet et un côté de l'angle à construire étant donnés ».

([3]) G.-J. Allman (*Greek Geometry from Thales to Euclid*, dans *Hermathena*, Vol. V, p. 186-189) a très nettement établi contre Zeller (*La Philosophie des Grecs*, trad. Boutroux, Vol. I, p. 325-327) que la période des guerres civiles de la Grande-Grèce n'a pu durer de 440 à 406 avant J.-C., qu'elle a commencé peu de temps après la ruine de Sybaris par les Crotoniates en 510, et que la fondation de Thurium, en 444, sur l'emplacement de Sybaris, en marque définitivement le terme.

mort de Pythagore avait été trop peu favorable aux loisirs géométriques, pour que l'on ne doive pas regarder l'Ouvrage publié comme représentant effectivement l'enseignement du Maître, beaucoup plutôt que des découvertes postérieures. Il reste possible et même assez probable que certaines des propositions que renfermait cet Ouvrage fussent en réalité le fruit du travail poursuivi en commun par l'École sous la direction de Pythagore et du vivant de celui-ci. Cependant on peut lui en laisser toute la gloire, ainsi que l'ont fait ses disciples.

En résumé, l'histoire de la Géométrie, pour ce qui regarde Pythagore, semble se trouver dans une situation plus favorable que l'histoire de la Philosophie. Quand nous trouvons, dans Aristote, une doctrine attribuée aux Pythagoriciens ou à certains Pythagoriciens, nous ne savons dans quel Ouvrage elle se trouvait consignée et quelle valeur traditionnelle elle pouvait présenter; si, au contraire, Eudème attribue un théorème aux Pythagoriciens, nous avons droit de penser qu'il le trouvait dans un Traité écrit vers le milieu du v[e] siècle et ne contenant guère que des propositions réellement connues de Pythagore. A dater de cet Ouvrage anonyme, l'École ne produisit rien en Géométrie jusqu'à l'époque d'Archytas, après lequel les mathématiciens qu'elle a pu donner se confondent avec les disciples de Platon.

5. Sur ce premier Traité de Géométrie grecque dont l'existence puisse être soupçonnée, je me bornerai à remarquer pour le moment que, d'après le résumé historique de Proclus, le cadre était déjà celui que remplissent les *Éléments* d'Euclide. La démonstration de l'égalité à deux droits de la somme des angles de tout triangle (Eudème dans Proclus, p. 379), nous fait partir du I[er] Livre, tandis que la découverte des incommensurables nous conduit jusqu'au X[e] et la construction des polyèdres réguliers au XIII[e], où cette théorie couronne l'œuvre d'Euclide, comme elle couronnait déjà le Traité pythagoricien ([1]).

([1]) Du cadre des *Élements* on doit cependant retrancher, dans cette comparaison, les Livres arithmétiques (VII à IX), qui semblent bien étrangers, comme forme au moins, à la tradition pythagoricienne. Quel est le véritable auteur du prototype de ces Livres? Qui le premier aura imaginé d'adjoindre aux théorèmes

Quelles lacunes présentait ce dernier Traité? C'est un point que nous examinerons ultérieurement; sans doute elles étaient considérables : il n'en est pas moins vrai que toute la Géométrie élémentaire nous apparaît ici, comme sortie brusquement de la tête de Pythagore, de même que Minerve du cerveau de Jupiter. N'y avait-il eu vraiment rien avant ce génie créateur? C'est assez peu croyable; mais en tout cas Eudème ne connaît aucun écrit géométrique, et ses recherches ne lui permettent d'attribuer aux précurseurs qu'il nomme que des connaissances d'un degré relativement infime. Il est donc au moins très probable que le caractère purement théorique et abstrait qui distingue si nettement la Géométrie grecque lui a été en réalité imprimé par Pythagore, ainsi que le marque expressément le résumé historique de Proclus, et que les écrits antérieurs, s'il en a existé, avaient au contraire un objet concret et des tendances pratiques.

J'ai déjà énoncé un peu plus haut les deux problèmes dont Eudème attribuait la solution à Œnopide. Ils sont assez simples pour qu'on puisse penser qu'ils n'étaient point traités dans l'Ouvrage pythagoricien, d'autant que celui-ci n'était sans doute pas encore composé avec une méthode parfaite; mais évidemment Eudème ne pouvait en dénier la connaissance ni à Pythagore, ni même à Thalès. Si le premier était mis hors de cause en raison de la publication postérieure de sa Géométrie, la conséquence à tirer pour ce qui concerne Thalès est qu'Eudème n'avait sous son nom que des propositions particulières, qui pouvaient même se trouver insérées dans la *Tradition touchant Pythagore*. Quant à Œnopide, une des deux citations de Proclus nous enseigne clairement à quelle source Eudème avait puisé ses informations.

(*Proclus*, p. 283). — « Ce problème : « Abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée », fut, pour la première fois, cherché par Œnopide, qui le considéra comme utile pour l'Astrologie. Il emploie au lieu de κάθετος (perpendiculaire)

---

de la Géométrie une suite de propositions rédigées suivant la même forme, mais touchant l'Arithmétique? Est-ce Hippocrate de Chios, et serait-ce là la justification véritable du titre d'*Éléments* (Στοιχεῖα) qu'il adopta, alors que ce titre, pour un Ouvrage traitant seulement de Géométrie, est évidemment impropre?

l'expression archaïque κατὰ γνώμονα (suivant le gnomon), qui vient de ce que le gnomon est à angles droits sur l'horizon. »

Ainsi, c'était dans un Traité astronomique et non pas géométrique d'Œnopide, qu'Eudème avait trouvé la plus ancienne solution connue de ce problème et qu'il y avait relevé la désignation primitive qu'il nous a conservée.

Le second problème (Euclid, I, 23, *Proclus*, p. 333) « qui est aussi plutôt une découverte d'Œnopide, comme le dit Eudème », pouvait sans aucun doute se rencontrer dans le même Ouvrage ([1]).

6. Pour Thalès, dont il nous reste à parler avant de revenir à Pythagore, si peu assurée qu'ait pu être la tradition venue jusqu'à Eudème, ce dernier possédait-il quelques documents anciens? On pourrait le croire à ce passage de Proclus (p. 250) :

« C'est à l'antique Thalès que l'on doit ce théorème, ainsi que tant d'autres découvertes; car il fut, dit-on, le premier à poser et à dire que dans tout triangle isoscèle les angles à la base sont égaux; au lieu d'*égaux* (ἴσας), il employait d'ailleurs l'expression archaïque de *semblables* (ὁμοίας) ».

Mais cette expression archaïque, Eudème ne pouvait-il la connaître par l'Ouvrage pythagoricien et, dès lors, la mettre dans la bouche de Thalès?

Une seconde citation (p. 299) semble bien prouver qu'il ne subsistait point de démonstrations attribuées à Thalès en même temps que certaines propositions :

« Ce théorème que, quand deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux, a été découvert en premier

---

([1]) Le nom d'Œnopide se rencontre encore dans Proclus (p. 80), au milieu d'un passage emprunté à Geminus. « D'après Zénodote, celui qui a été un des successeurs d'Œnopide et un des disciples d'Andron, on distingue le théorème du problème en ce que, etc. » Cette distinction, sur laquelle je reviendrai, est, sans aucun doute, postérieure à Aristote, et probablement aussi à Eudème. Nous avons ainsi la preuve qu'Œnopide avait fondé, probablement à Chios, une école scientifique qui subsista longtemps, et de laquelle dut sortir Hippocrate. Malheureusement Andron et Zénodote sont complètement inconnus d'ailleurs, et le texte est, d'autre part, loin d'être parfaitement assuré.

lieu par Thalès, comme le dit Eudème; Euclide en a donné la démonstration scientifique. »

Si donc Proclus nous dit (p. 157), dans un endroit qui, cette fois, doit d'ailleurs provenir directement de Geminus, que « la division en deux parties égales du cercle par le diamètre a été *démontrée*, dit-on, en premier lieu par Thalès », nous devons d'autant moins croire à la justesse de l'expression ἀποδεῖξαι (démontrer), que cette propriété du diamètre, quoique énoncée dans les définitions d'Euclide, ne fait l'objet d'aucune démonstration des *Éléments*.

Enfin la dernière citation (p. 352) nous indique de la façon la plus claire comment Eudème procédait pour Thalès :

« Eudème, dans les *Histoires géométriques*, fait remonter ce théorème (I, 26) à Thalès; car il dit que ce dernier devait nécessairement s'en servir d'après la manière dont on rapporte qu'il déterminait la distance des vaisseaux en mer. »

La tradition, soit pythagoricienne, soit tout autre, attribuait à Thalès un procédé déterminé pour mesurer la distance à un point inaccessible; Eudème en concluait, sans autre donnée, que Thalès possédait les théorèmes indispensables pour rendre raison de ce procédé.

Malheureusement, nous ne savons nullement en quoi consistait cette solution d'un problème pratique attribuée à Thalès. La donnée qui s'y rapporte est absolument insuffisante pour le déterminer; cependant, s'il est permis de former une conjecture, il faut avant tout rechercher la solution la plus primitive parmi celles qui sont connues historiquement.

Il n'en est point à cet égard qui puisse lutter avec la *fluminis varatio* de l'agrimenseur romain Marcus Junius Nipsus [1]. Si imparfaite, si impraticable même qu'elle puisse être dans la plupart des cas, du moment où nous constatons historiquement son existence, il n'y a aucun motif sérieux pour l'écarter quand il s'agit de Thalès.

Soit à mesurer la distance du point A au point B inaccessible;

---

[1] *Gromatici veteres, ex recensione Caroli Lachmanni*. Berlin, Reimer, 1848, p. 285-283.

on élève, sur le terrain, à AB une perpendiculaire AC de longueur quelconque, que l'on divise en deux parties égales au point D; en C on élève à AC, dans la direction opposée à AB, la perpendiculaire CE jusqu'à sa rencontre en E avec la droite BD. La longueur CE que l'on mesure sera égale à la longueur cherchée.

En effet, les deux triangles ABD, DCE sont égaux comme ayant un côté égal (AD = DC par construction) compris entre deux angles égaux chacun à chacun. Or c'est là précisément le théorème I, 26 attribué par Eudème à Thalès. Quant à l'égalité des angles, elle a lieu pour ceux en A et E, parce qu'ils sont droits, pour ceux en D, parce qu'ils sont opposés par le sommet, et nous retrouvons encore ici un autre théorème que nous avons vu attribuer à Thalès. Notre conjecture reçoit par là une sérieuse confirmation.

7. Des autres solutions proposées pour représenter le procédé de Thalès, je rejette celle de Bretschneider, parce qu'elle est aussi peu avantageuse, qu'elle n'est pas constatée historiquement, parce qu'enfin elle suppose l'emploi d'un instrument propre à viser suivant un angle égal à un angle donné. La *fluminis varatio* ne réclame au contraire que l'équerre, les jalons et les instruments pour la mesure des longueurs, c'est-à-dire le matériel qu'ont possédé les arpenteurs bien avant la constitution de la Science.

J'écarte la solution par l'emploi de triangles semblables, parce qu'elle ne se retrouve pas chez les agrimenseurs romains, et qu'il est dès lors à présumer que chez les Grecs cette solution est d'une invention relativement récente et qu'elle n'a jamais été très répandue (1). A la vérité, Plutarque (2) attribue à Thalès d'avoir mesuré la hauteur des pyramides d'après leur ombre comparée à celle d'un bâton; mais, dans cette donnée, Plutarque est l'écho d'un condisciple d'Eudème, non pas de ce dernier, et il dénature gravement le récit primitif (3), qui d'une part suppose l'égalité de l'ombre à l'objet, de l'autre n'indique nullement que les Égyp-

(1) Il n'y a pas à s'en étonner; la Géodésie a dû rester longtemps dans la routine, en raison de sa séparation d'avec la Géométrie. L'emploi des triangles semblables sur le terrain se trouve au reste indiqué dans le Traité de la *Dioptre* de Héron d'Alexandrie comme dans les *Cestes* de Sextus Julius Africanus.

(2) *Sept. Sap. Conviv.*, éd. Didot, M. 174, 39.

(3) *Diogène Laërce*, I, 37. « Hiéronyme (de Rhodes) dit qu'il mesura les pyramides en observant l'ombre, quand elle nous est égale. »

tiens, maîtres de Thalès, ignorassent ce procédé élémentaire.

Quoique la solution, rapportée d'après Hiéronyme de Rhodes, suppose bien une certaine notion de la similitude, on doit en conclure que cette notion n'était pas encore assez familière pour être appliquée d'une façon réellement pratique à la mesure d'une hauteur verticale, et c'est bien ainsi sans doute que nous devons nous représenter cette notion soit chez les Égyptiens, soit chez Thalès.

La notion de la similitude est incontestablement une des premières que l'homme ait acquise; mais elle est restée longtemps concrète dans les arts du dessin ou de la construction, et c'est ainsi qu'elle nous apparaît en fait dans le papyrus mathématique d'Eisenlohr ([1]), lorsque nous y voyons, par exemple, calculer l'arête d'une pyramide d'après son rapport à sa projection sur la base. Si précise que nous semble déjà cette notion de la similitude, il y avait un pas immense à faire avant de l'appliquer à des problèmes pratiques d'une autre nature, soit sur le terrain dans l'arpentage, soit même pour des mesures par les ombres. Il fallait rendre d'abord cette notion purement abstraite, puis lui donner les diverses formes concrètes dont elle est susceptible. Ce pas ne semble avoir été fait que par les Grecs et cela probablement après Thalès ([2]).

8. Deux des théorèmes attribués à ce dernier par Eudème se trouvent, dans notre conjecture, rattachés, comme on l'a vu, à un problème pratique concret (αἰσθητικώτερον). Mais, d'après le résumé historique de Proclus, Eudème avait connaissance, par la tradition, au moins d'une autre question traitée par Thalès d'une façon plus abstraite (καθολικώτερον). Est-il donc possible de rattacher à un seul problème abstrait les deux autres propositions citées par Eudème?

Il me le semble, si l'on fait intervenir la dernière donnée précise que nous possédions sur les travaux géométriques de Thalès, et que nous a conservée Diogène Laërce (I, 24). « Pamphila (compilatrice de la fin du Ier siècle après J.-C.) dit qu'il apprit la Géométrie chez les Égyptiens, que le premier il inscrivit le triangle rec-

---

([1]) *Voir* l'ingénieuse conjecture de M. Cantor : *Ueber den sogenannten Seqt der aegyptischen Mathematiker* (*Sitzb. der k. Akad. der Wissensch.* Wien. XC, 1884).

([2]) La mesure d'une hauteur verticale suivant le procédé indiqué par Plutarque se trouve en tout cas dans les *Optiques* d'Euclide, 19.

tangle dans le demi-cercle, et qu'à cette occasion il sacrifia un bœuf. D'autres, par exemple Apollodore le logisticien, attribuent ce trait à Pythagore ».

Il s'agit évidemment, soit de la propriété du demi-cercle que tous les angles qui y sont inscrits sont droits, soit de la réciproque que la demi-circonférence est le lieu des sommets des angles droits dont les côtés passent par les extrémités du diamètre ([1]). Mais ces deux propositions se tiennent d'assez près pour que l'on n'ait pas à faire de distinction entre elles; et il semble que Thalès a pu y être conduit en se proposant de construire sur le terrain un triangle rectangle dont l'hypoténuse est donnée de position, et un côté de l'angle droit donné de longueur seulement : problème pratique, mais conçu sous forme abstraite.

La donnée de Pamphila peut parfaitement provenir d'Eudème, car Proclus n'avait pas à parler de la proposition dont il s'agit dans son commentaire sur le Ier Livre d'Euclide. Quant à la légende sur le sacrifice d'un bœuf, elle peut venir d'une autre source; en tout cas, celle qui attribue ce sacrifice à Pythagore ne concernait certainement pas le même théorème, quoi que semble dire Diogène Laërce; mais nous n'avons pas à nous y arrêter pour le moment.

On conclut généralement du témoignage de Pamphila que Thalès connaissait l'égalité à deux droits de la somme des angles d'un triangle; mais il est essentiel d'observer qu'Eudème ne tirait nullement la même conclusion. D'après Proclus (p. 379), il attribuait formellement aux Pythagoriciens la découverte de ce théorème et reproduisait leur démonstration, analogue à la nôtre. A la vérité, dans Eutocius sur Apollonius (p. 9), Geminus s'exprime comme suit, en comparant à ce qui s'est passé pour ce théorème l'histoire de l'invention des coniques : « Les anciens ont considéré les deux droits d'abord pour chaque espèce de triangle, en premier lieu l'équilatéral, en second lieu l'isoscèle, en troisième lieu le scalène; ceux qui vinrent ensuite ont démontré généralement le théorème, que dans tout triangle la somme des trois angles intérieurs est égale à deux droits. »

([1]) En parlant ici de lieu, j'emploie une notion qui n'a évidemment été précisée que bien plus tard.

On a admis que la démonstration des trois cas appartenait à Thalès et le théorème général aux Pythagoriciens. Mais cette conclusion est insoutenable, du moment où tous les témoignages concordent pour établir que ni Geminus ni Eudème n'ont eu entre leurs mains aucun écrit géométrique remontant à Thalès, que la tradition qui le concernait avait seulement conservé des solutions de problèmes pratiques, sans raisonnements. Ce qu'il faut dire simplement, c'est que dans l'Ouvrage géométrique des Pythagoriciens, la démonstration était faite pour les trois cas, que plus tard les deux premiers auront été supprimés comme inutiles.

Nous ne pouvons pas, en somme, juger ce que connaissait Thalès, ni ce qu'il ignorait; peut-être sa géométrie dépassait-elle de beaucoup les limites que lui assignait Eudème, peut-être cependant ne comportait-elle aucune démonstration en forme; mais la question n'est pas là. Le fait est que, si la donnée relative à la propriété du demi-cercle remonte au disciple d'Aristote, celui-ci devait connaître une démonstration qui ne s'appuyait pas sur le théorème de la somme égale à deux droits. Mais cette démonstration ne pouvait évidemment se passer des deux propositions attribuées à Thalès et relatives, d'une part à l'égalité des deux portions du cercle séparées par le diamètre, de l'autre à l'égalité des angles à la base d'un triangle isoscèle (¹).

Je crois avoir ainsi accompli la tâche que je m'étais proposée pour Thalès; je n'ai point cherché à déterminer ce qu'il a pu savoir, mais bien à préciser comment s'est formée la tradition qui concerne ses travaux géométriques; j'ai montré qu'elle se réduit probablement à deux données relatives à des solutions de problèmes pratiques et trop simples d'ailleurs pour qu'on en puisse tirer des conclusions assurées.

(¹) Si dans un cercle dont AB est le diamètre, on mène par le centre O un autre diamètre COD, il est facile, avec les deux propositions précitées, et en admettant l'égalité des angles opposés par le sommet, théorème attribué à Thalès par Eudème, de démontrer que dans le quadrilatère ACBD les quatre angles sont égaux et les côtés opposés égaux entre eux. Or on a très bien pu, à l'époque dont il s'agit, définir le rectangle d'après ces propriétés.

CHAPITRE VII.

La constitution des Éléments.

1. Dès le milieu du ve siècle avant J.-C., ai-je dit, il a dû exister un Traité de Géométrie portant le nom de Pythagore et présentant déjà le même cadre que les *Éléments* d'Euclide. Quels progrès successifs ont amené cette première ébauche, sans doute bien imparfaite encore, à la forme classique qui devait s'imposer à l'enseignement? Voilà ce qu'il serait intéressant de connaître.

Proclus, dans son résumé historique, nous a conservé les noms de trois ou quatre auteurs d'*Éléments* antérieurs à Euclide: Hippocrate de Chios, Léon, Theudios de Magnésie, Hermotime de Colophon (¹). Mais ces noms nous sont inconnus, sauf le premier, et les renseignements que nous possédons sur Hippocrate sont relatifs à des travaux en dehors du cadre d'Euclide; il nous faut donc chercher ailleurs.

Il est à remarquer que Proclus, quand il parle, soit des travaux d'Hermotime, soit de ceux d'Euclide, indique chaque fois, comme précurseurs, deux géomètres qu'il ne cite pas comme auteurs d'*Éléments*, mais sur les travaux desquels il a spécialement attiré l'attention. Il semble donc que ces deux géomètres, Eudoxe et Théétète, soient en réalité ceux qui aient joué le rôle le plus important dans le développement de la Géométrie, de Pythagore à Euclide.

Est-il permis de préciser ce rôle pour chacun d'eux, de déterminer les théories spéciales qui leur sont dues?

2. Sur la part d'Eudoxe dans la constitution des *Éléments*, nous possédons deux données positives, d'une importance capitale,

(¹) Il n'est pas très clair que ce dernier ait effectivement composé des *Éléments*.

et qui suffiraient, sans ses autres travaux, trop souvent dépréciés par l'ignorance, pour assurer au Cnidien un rang parmi les premiers génies de l'antiquité.

Un scholie anonyme sur Euclide (peut-être provenant de Proclus) ([1]) dit que le Livre V d'Euclide, lequel contient la théorie des proportions, conçue généralement et comme applicable à l'Arithmétique et à la Musique aussi bien qu'à la Géométrie ([2]), est une invention d'Eudoxe.

Archimède (Préface *Sur la sphère et le cylindre*) lui attribue expressément la mesure de la pyramide et du cône, c'est-à-dire, en somme, ce que le Livre XII contient de véritablement capital. Il nous dit ailleurs (Préface de la *Quadrature de la parabole*) que les deux théorèmes sur ces mesures, ainsi que ceux qui concernent la proportionnalité des aires de deux cercles aux carrés de leurs rayons et des volumes de deux sphères aux cubes de leurs rayons, ont été démontrés à l'aide d'un *lemme* semblable à celui dont il se sert lui-même ([3]).

Or ce lemme se retrouve, sous une forme différente il est vrai, mais qui ne l'altère pas, dans la déf. 4 du Livre V d'Euclide, c'est-à-dire celui dont le fond est attribué à Eudoxe par le scholiaste anonyme ([4]). Quoique le théorème sur la proportionnalité des aires de deux cercles fût déjà connu d'Hippocrate, on peut donc considérer Eudoxe comme le véritable auteur du principe qui, pendant toute l'antiquité, a tenu le rôle que joue aujourd'hui le principe des limites; car, s'il ne l'a peut-être pas formulé le premier, il a su, avant tout autre, montrer la fécondité de ses applications; il a été ainsi le véritable précurseur d'Archimède pour les quadratures et les cubatures.

([1]) Knoche, *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus zu Euclid's Elementen*, Herford, 1865.

([2]) C'est sans doute par là qu'il faut expliquer l'expression de théorèmes généraux (καθόλου) attribués à Eudoxe dans le résumé de Proclus.

([3]) Sous une forme un peu modernisée : « Si deux quantités (lignes, surfaces ou volumes) sont inégales, leur différence, ajoutée à elle-même un nombre de fois suffisant, finira par dépasser toute quantité donnée de même ordre. »

([4]) Il va sans dire qu'Euclide se sert de cette définition pour la démonstration des théorèmes dont il s'agit.

3. Le premier témoignage que nous avons cité exige peut-être certaines explications.

La différence la plus saillante que présente la Géométrie plane d'Euclide (ses six premiers Livres) avec les Traités élémentaires modernes consiste en ce que les Grecs introduisaient aussi tard que possible la notion de similitude. En fait, elle n'apparaît qu'au Livre VI; les triangles, les parallélogrammes, le cercle, les polygones réguliers ont déjà été étudiés dans toutes leurs propriétés essentielles; il ne s'agit plus que de traiter à part ce qui concerne les figures semblables, sans se servir d'aucune de leurs propriétés pour démontrer des théorèmes dont l'énoncé ne les suppose pas.

Euclide emploie d'ailleurs, dès son premier Livre, pour ses constructions et pour ses démonstrations, un artifice spécial qui supplée souvent pour lui la théorie de la similitude. Si, par un point quelconque d'une diagonale d'un parallélogramme, on mène des parallèles aux côtés, on divisera le parallélogramme en quatre autres, deux *péridiamétraux* (traversés par la diagonale) semblables entre eux, et deux *paraplérômes* (compléments) équivalents entre eux, et dont les côtés sont par conséquent réciproques. Cette équivalence se démontre directement de la façon la plus simple, et Euclide a dès lors le moyen, par exemple, de construire, sans employer le mot, une quatrième proportionnelle, comme second côté d'un *paraplérôme* dont le premier côté est connu avec le *paraplérôme* correspondant. Il suffit d'achever la figure parallélogrammique.

Or il est difficile de croire que cette singularité historique corresponde réellement à la marche du développement de la Géométrie. Comme je l'ai déjà remarqué, le principe de similitude est supposé par les arts du dessin, dès leurs premières tentatives; sa connaissance est bien constatée chez les Égyptiens et l'on peut d'autant moins refuser à Pythagore d'en avoir eu pleine conscience, que la tradition la plus constante lui attribue l'emploi de la proportion géométrique. On est donc amené à penser que la Géométrie de Pythagore ne procédait nullement comme celle d'Euclide, qu'elle suivait plutôt une marche bien plus voisine de celle de nos Traités élémentaires.

Mais, à l'origine, on fondait la corrélation entre la Géométrie et l'Arithmétique sur la proportion géométrique dans l'hypothèse de

la commensurabilité de toutes les grandeurs, hypothèse certainement aussi naturelle qu'elle est fausse, et qui, à l'époque où Platon écrivait les *Lois,* était encore très répandue. La découverte de l'incommensurabilité par Pythagore dut donc causer, en Géométrie, un véritable scandale logique, et, pour y échapper, on dut tendre à restreindre autant que possible l'emploi du principe de similitude, en attendant qu'on fût arrivé à l'établir sur une théorie de la proportionnalité indépendante de l'hypothèse de la commensurabilité.

C'est à Eudoxe qu'appartient la gloire d'avoir créé cette théorie, puisque c'est là l'objet du Livre V des *Éléments;* la rigueur en est incontestable, et, si l'embarras de la forme géométrique a été un motif pour l'abandonner, il serait facile de l'en dégager, et elle soutiendrait alors sans aucun désavantage la comparaison avec les expositions modernes, si souvent défectueuses ([1]).

4. Il semble donc que, entre Pythagore et Euclide, la Géométrie plane ait subi dans son ensemble un remaniement profond, dont le moment décisif aura été le travail d'Eudoxe sur les proportions. Ce travail, en réalité, n'appartient pas à la Géométrie proprement dite, et, en bonne logique, il eût convenu de le placer en tête des *Éléments;* mais, pour être adopté, cet ordre était trop en désaccord avec la tradition et avec la gradation des difficultés. Euclide fut donc conduit à procéder suivant une tout autre marche.

Les circonstances que je viens d'essayer de retracer ont eu une conséquence spéciale sur laquelle je crois utile d'appeler l'attention.

Le principe de similitude se démontre en employant le postulatum des parallèles; mais, inversement, en formulant le principe sous une forme suffisamment simple et en l'admettant *a priori,* on pourrait s'en servir pour démontrer le postulatum des parallèles. La formule choisie peut enfin être assez claire pour lutter d'évidence intuitive avec le postulatum ([2]), et si on les proposait

---

([1]) Duhamel (*Éléments de Calcul infinitésimal,* t. I, p. 1-6, etc.) a suffisamment traité cette question pour que je n'insiste pas.

([2]) Par exemple, le rapport entre l'hypoténuse d'un triangle rectangle et un côté de l'angle droit est constant, si l'angle compris reste le même.

à quelque ouvrier, ignorant en Géométrie, mais familier avec les pratiques de son art, il y aurait souvent chance pour qu'il prononçàt en faveur du principe de similitude.

Il ne faut pas évidemment se représenter la Géométrie de Pythagore comme arrivée au degré de perfection qui date d'Euclide. La forme des démonstrations devait être, en général, aussi rigoureuse, mais le nombre des vérités admises comme primordiales était, sans doute, beaucoup plus considérable, et, si l'on met à part les travaux originaux d'Eudoxe et de Théétète, le progrès dut consister, en ce qui concerne le domaine des *Éléments*, beaucoup moins dans la découverte de propriétés nouvelles que dans la réduction des axiomes. Or il me semble hors de doute que du moment où l'abstraction géométrique commença, elle dut admettre sur le même pied, sous une forme ou sous une autre, d'une part, le principe de similitude, dérivé des arts du dessin, de l'autre, le postulatum des parallèles, qui, peut-être, provient plutôt de l'arpentage. Si, plus tard, l'un des deux principes passa au second plan, ce ne fut pas pour quelque raison *a priori*, qui n'existe pas, mais bien parce que la similitude fut reconnue dépendre d'une théorie générale, laquelle n'était point suffisamment élucidée. Ainsi l'ordre que nous continuons à suivre à cet égard n'a qu'une valeur simplement historique.

5. J'ai déjà eu l'occasion d'indiquer, à propos d'un passage du résumé historique de Proclus ([1]), comment Bretschneider avait été amené à voir, dans les démonstrations analytiques adjointes aux premières propositions du Livre XIII des *Éléments*, le débris d'un travail d'Eudoxe; il a semblé, d'après cela, que le Cnidien avait également apporté une contribution importante à la théorie des polyèdres réguliers, objet de ce Livre, théorie, nous le savons, déjà ébauchée par Pythagore.

Mais cette conclusion tombe, si, comme j'ai essayé de le montrer, l'interprétation de Bretschneider est inexacte. Tout au contraire, le témoignage de Suidas peut être invoqué pour affirmer que c'est à Théétète, non à Eudoxe, qu'a été emprunté comme fond le Livre XIII d'Euclide ([2]).

([1]) *Voir* plus haut, p. 76.

([2]) « Théétète, d'Athènes, astrologue, philosophe, disciple de Socrate, enseigna

Si l'autorité de Suidas est souvent sans valeur, sa donnée peut recevoir une confirmation sérieuse d'après la nature d'un travail qu'on est unanime pour attribuer à Théétète.

Dans le dialogue auquel Platon a donné le nom de son condisciple se trouve un précieux document : Théodore de Cyrène, leur maître commun en Géométrie, avait composé un Ouvrage sur les lignes pouvant une surface [1] (côtés des carrés ayant cette surface), comme de trois pieds, de cinq pieds, pour montrer qu'elles sont incommensurables en longueur à la ligne d'un pied, et il avait ainsi examiné successivement toutes ces lignes jusqu'à celle pouvant 17 pieds.

Théétète, encore tout jeune, est représenté par Platon comme s'élevant au concept général de la ligne racine carrée incommensurable d'une aire rationnelle, ligne qu'il appelle δυναμένη (ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος d'Euclide = rationnelle commensurable en puissance seulement), tandis qu'il appelle μῆκος (longueur) la racine carrée commensurable (ῥητὴ μήκει σύμμετρος d'Euclide = rationnelle commensurable en longueur).

On a vu là un motif suffisant pour regarder Théétète comme le fondateur de la théorie des incommensurables, telle qu'elle est exposée dans le Livre X d'Euclide, avec une terminologie, toutefois, quelque peu modifiée, ainsi qu'on vient de le voir. En y joignant le Livre XIII, on a de la sorte un ensemble de travaux qui peuvent n'avoir point l'importance de ceux d'Eudoxe, mais suffisent pour placer Théétète au rang que lui assigne le résumé historique de Proclus.

6. Il convient de faire ressortir la liaison singulière qui existe entre les deux Livres précités d'Euclide, liaison qui fournit la confirmation dont peut avoir besoin la donnée de Suidas.

L'objet du Livre XIII semble moins, en fait, être la construction

---

à Héraclée. Il écrivit le premier « les cinq solides », comme on les appelle. Il vivait après la guerre du Péloponnèse.

» Théétète, d'Héraclée du Pont, philosophe, disciple de Platon. »

Il est probable que ces deux Notices se rapportent au même personnage.

(1) Je considère le texte actuel de Platon comme corrompu par la substitution du mot δύναμις (puissance) au mot technique δυναμένη (pouvant). *Voir* mon article : *La langue mathématique de Platon*, dans les *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux* (fasc. 3, p. 95 ; 1884).

des polyèdres réguliers et leur inscription dans la sphère (problèmes dont on peut très bien attribuer la solution à Pythagore), que la détermination des rapports qu'ont entre eux et avec le rayon de la sphère les côtés des cinq polyèdres. Cette question avait dû se poser déjà pour Pythagore, mais il n'avait évidemment pu la mener à bout; car, s'il découvrit l'incommensurabilité de lignes fournies par les constructions géométriques, ses travaux ne paraissent pas avoir été bien loin dans cette voie. En tout cas, l'Ouvrage publié par ses disciples ne devait renfermer, sur cette question, que la démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale au côté du carré [1], puisque Théodore de Cyrène reprit la question à $\sqrt{3}$ [2].

Pour arriver au but dont il s'agissait, nous employons des notations algébriques; les Grecs imaginèrent de classer les irrationnelles fournies par les constructions géométriques, et le Livre X nous fournit ce classement, avec les propriétés, non seulement pour l'équation du second degré et pour l'équation bicarrée à coefficients rationnels, mais même en partie pour l'équation tricarrée.

Le Livre XIII s'appuie immédiatement sur ce classement; ainsi telle ligne que nous déterminons comme différence de deux radicaux est déterminée en tant qu'*apotome;* telle autre, de la forme $\sqrt{p+\sqrt{p^2-q}}$, est suffisamment désignée comme *majeure* (μείζων). Si l'on observe, d'autre part, que ce Livre contient plusieurs théorèmes qu'Euclide aurait certainement mieux placés dans le quatrième, où il traite des polygones réguliers, on est facilement induit à penser que l'on se trouve, pour le Livre XIII, en présence d'un ensemble introduit dans les *Éléments* avec très peu de modifications. Dès lors, les théories du Livre X, qui y sont employées, apparaissent comme provenant sans doute du même auteur, c'est-à-dire de Théétète, conformément aux données émanant de Platon et de Suidas.

---

[1] Démonstration qui, au témoignage d'Aristote, se faisait par l'absurde, en prouvant qu'un nombre devrait être à la fois pair et impair. Ce semble donc être celle qu'on trouve précisément à la fin du Livre X d'Euclide.

[2] Je crois inutile d'insister sur la difficulté que semblent avoir éprouvée les premiers géomètres à s'élever aux généralisations les plus simples, difficultés dont le témoignage de Platon nous fournit un exemple si curieux; on en a déjà vu un autre (Geminus dans Eutocius sur Apollonius, p. 9) à propos du théorème sur la somme des trois angles d'un triangle.

Il est à peine utile de faire remarquer qu'on ne peut nullement conclure de là que le Livre X tout entier soit dû à Théétète; tout au contraire, il est assez probable que la plus grande partie de la nomenclature, que ne suppose pas le Livre XIII, est postérieure, et l'état d'imperfection sensible où Euclide laisse cette théorie peut même indiquer que, avant lui, elle n'avait guère été travaillée depuis son fondateur (¹).

7. Ainsi nous avons pu, avec une probabilité plus ou moins grande, reconstituer le rôle des deux géomètres qui nous sont indiqués comme ayant exercé la plus grande influence sur la doctrine des *Éléments*.

Il nous reste, pour contrôler le résultat de nos recherches, à passer rapidement en revue les données précises que nous possédons sur les travaux géométriques des Pythagoriciens, et à examiner si, entre les théories dont il convient de leur supposer la connaissance et celles que nous avons attribuées à Eudoxe et à Théétète, ne se trouverait pas quelque lacune importante; dans ce cas, nous ne saurions guère qui l'aurait comblée.

Je relève exclusivement ce qui concerne la Géométrie, en suivant, d'ailleurs, l'ordre théorique.

a. (*Proclus*, p. 379). — « Eudème, le péripatéticien, fait remonter aux Pythagoriciens l'invention de ce théorème (*Euclide*, I, 32) que, dans tout triangle, la somme des angles intérieurs est égale à deux droits. Il dit qu'ils le démontrent comme suit :

» Soit le triangle ABC; menez, par A, DE parallèle à BC. Puisque BC, DE sont parallèles et que les angles alternes-internes (ἐναλλάξ) sont égaux, on a

$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC} \quad \text{et} \quad \widehat{EAC} = \widehat{ACB}.$$

Ajoutez de part et d'autre $\widehat{BAC}$. On aura donc

$$\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE},$$

(¹) La théorie des irrationnelles exige des notions sur les nombres; sont-ce les travaux de Théétète qui ont déterminé l'introduction dans les *Éléments* des Livres arithmétiques (VII à IX) au rang singulier qu'ils occupent? A-t-il lui-même travaillé sur ce sujet? Ces questions, actuellement, me paraissent insolubles.

c'est-à-dire

$$\widehat{DAB} + \widehat{BAE},$$

c'est-à-dire deux droits = la somme des trois angles du triangle ABC. La somme des trois angles d'un triangle est donc égale à deux droits. Telle est la démonstration des Pythagoriciens. »

b. (*Proclus,* p. 304-305). — « Ainsi, six triangles équilatéraux, assemblés par le sommet, remplissent exactement les quatre angles droits; de même trois hexagones et quatre carrés. Tout autre polygone quelconque dont on multipliera l'angle, donnera plus ou moins que quatre droits; cette somme n'est donnée exactement que par les seuls polygones précités, assemblés suivant les nombres donnés. C'est là un théorème pythagoricien. »

c. (*Proclus,* p. 426, sur Euclide, I, 47 : théorème du carré de l'hypoténuse). — « Si l'on écoute ceux qui veulent raconter l'histoire des anciens temps, on peut en trouver qui attribuent ce théorème à Pythagore et lui font sacrifier un bœuf après sa découverte. »

d. (*Proclus,* p. 419, sur Euclide, I, 43). — « Ce sont, nous dit-on d'après Eudème (οἱ περὶ τὸν Εὔδημον), d'anciennes découvertes dues à la muse des Pythagoriciens, que la *parabole* des aires, leur *hyperbole* ou leur *ellipse* [1]. C'est de là que, plus tard, on prit ces noms pour les transporter aux coniques, qu'on appela : l'une, *parabole* (comparaison), l'autre, *hyperbole* (excès), la troisième, *ellipse* (défaut); tandis que, pour ces hommes anciens et divins, c'était dans la construction plane des aires sur une droite déterminée qu'apparaissait la signification de ces termes. Si vous prenez la droite tout entière et que vous y terminiez l'aire donnée, on dit que vous faites la *parabole* de cette aire; si vous lui donnez une longueur qui dépasse la droite, c'est l'*hyperbole;* si une longueur inférieure, c'est l'*ellipse*, une partie de la droite restant alors en dehors de l'aire construite. C'est au Livre VI qu'Euclide traite de l'*hyperbole* et de l'*ellipse;* mais ici il avait besoin de la *parabole* par une droite donnée d'une aire équivalente à un

---

[1] Soient A une aire donnée, p la longueur par rapport à laquelle se fait la *parabole*, il s'agit de construire l'inconnue x dans les équations $px = A$ (parabole simple), $px + mx^2 = A$ (parabole avec hyperbole), $px - mx^2 = A$ (parabole avec ellipse). C'est la nomenclature classique depuis Euclide.

triangle donné, pour nous fournir, après la construction (σύστασις, prop. 42) d'un parallélogramme équivalent à ce triangle, sa *parabole* par une droite déterminée. Ainsi, qu'on donne un triangle ayant une aire de 12 pieds et une droite dont la longueur soit de 4 pieds, nous faisons la *parabole* de l'aire du triangle sur la droite, si, prenant la longueur totale de 4 pieds, nous trouvons de combien de pieds doit être la largeur pour que le parallélogramme soit équivalent au triangle. Ainsi, ayant trouvé, dans ce cas, la largeur de 3 pieds, nous multiplions la longueur par la largeur, en supposant que l'angle donné soit droit, et nous avons l'aire. Voilà ce qu'est la *parabole* d'après l'antique tradition venue des Pythagoriciens. »

J'ai tenu à traduire *in extenso* ces passages de Proclus (ici Porphyre-Pappus) à cause de l'authenticité de la tradition qu'ils représentent. Je mentionnerai seulement les témoignages qui suivent :

e. Emploi du pentagone étoilé comme signe de reconnaissance par les Pythagoriciens (Lucien, *Pro lapsu in salut.* 5, etc.).

f. Le sacrifice légendaire a dû être offert par Pythagore, soit pour le théorème sur le carré de l'hypoténuse, soit pour la *parabole* des aires (Plutarque, *Non posse suav. vivi sec. Epic.*, 11), soit plutôt pour la solution du problème suivant :

Construire une figure équivalente à une figure donnée et semblable à une seconde figure donnée (Plutarque, *Sympos.* VIII) [1].

g. Construction des polyèdres réguliers (*Proclus*, p. 65) et, en particulier, inscription du dodécaèdre dans la sphère. (Jamblique, *De vit. Pyth.*, 18).

8. J'ai déjà suffisamment parlé des questions (*a*) et (*g*); il est clair que (*b*) dérive logiquement de (*a*), mais a dû être provoqué par les problèmes pratiques de décoration des carrelages ou des murailles, de même que la recherche des polyèdres réguliers doit avoir eu son origine dans des tentatives analogues d'architectes. Il est même très possible que ce soit la reconnaissance empirique de la propriété des triangles équilatéraux, assemblés autour d'un sommet commun, qui ait amené la découverte de l'égalité à deux

---

[1] Plutarque, qui n'est nullement mathématicien, dit mal à propos « faire la parabole » au lieu de « construire ».

droits de la somme des angles de chacun de ces triangles ; on sera passé ensuite, d'après le témoignage de Geminus, d'abord au triangle isoscèle, enfin au scalène.

Le ton sur lequel Proclus parle de la découverte du carré de l'hypoténuse (*c*) prouve assez, sans en rapprocher les contradictions de Plutarque (*f*), que la légende du sacrifice n'était nullement assurée. Il semble qu'Eudème ne l'ait pas connue et qu'elle ait été appuyée uniquement, dans l'antiquité, sur deux vers anciens, rapportés par un logisticien du nom d'Apollodore (-ote), et qu'on peut traduire comme suit :

> Pythagore, inventant la célèbre figure,
> Offrit une victime et rendit grâce aux dieux,

témoignage bien insuffisant, certes, pour reconnaître le théorème auquel est resté attaché le nom du sage de Samos. Tout semble indiquer, au contraire, que, s'il ne l'a pas emprunté aux Égyptiens (¹), cette proposition fut une des premières qu'il rencontra et nullement le couronnement de ses recherches.

Proclus paraît dire assez clairement (p. 426) que la démonstration donnée par Euclide (²) appartient à ce dernier ; mais celle de Pythagore nous est absolument inconnue, et c'est peine bien inutile que de chercher les raisonnements les plus primitifs pour les lui attribuer. La Géométrie de Pythagore était déjà assez savante pour qu'il pût faire la démonstration par les triangles semblables.

9. La substance du Livre Ier d'Euclide, d'après des témoignages suffisamment précis de Proclus, appartient en tout cas aux Pythagoriciens et il leur attribue aussi nettement les théories du Livre VI.

Le problème que cite en dernier lieu Plutarque (*f*) (*Euclide*,

---

(¹) M. Cantor (*Vorlesungen*, p. 56, etc.) a solidement établi qu'on ne peut dénier aux Égyptiens la connaissance de triangles rectangles en nombres particuliers. L'exemple des Chinois semble bien prouver qu'on pouvait arriver à reconnaître la loi générale ailleurs qu'en Grèce ; je ne parle pas des *Çulvasûtras* hindous, parce qu'ils peuvent être postérieurs à la conquête d'Alexandre.

(²) Celle que nous appelons vulgairement le *pont-aux-ânes*, et que les Grecs désignèrent comme Θεώρημα τῆς νύμφης (George Pachymère, mss. de la Bibliothèque nationale).

VI, 25), se réduit à la connaissance du rapport des aires de deux figures semblables, proposition connue d'Hippocrate de Chios, à l'invention de deux quatrièmes ou troisièmes proportionnelles [parabole simple $(d) = I{,}44$] et d'une moyenne proportionnelle (II, 14). Ce problème est essentiel pour le cas de la parabole complète avec ellipse ou hyperbole, telle que la traite Euclide au Livre VI (28, 29), c'est-à-dire lorsque, dans l'équation à résoudre $px \pm mx^2 = A$, m est un rapport donné différent de l'unité [1].

C'est attribuer à Pythagore la construction géométrique des problèmes du second degré ; mais, si les témoignages cités à cet égard peuvent paraître sujets à caution, il convient de remarquer que, comme nous le verrons, cette construction était très probablement connue d'Hippocrate de Chios ; que, d'autre part, la connaissance du pentagone régulier $(e)(g)$ par les Pythagoriciens prouve bien qu'ils savaient au moins résoudre un problème spécial du second degré, la division d'une ligne en moyenne et extrême raison.

Dès lors, ils semblent bien avoir au moins fourni le fond de toutes les théories importantes des *Éléments,* si l'on excepte, d'une part, celles que nous avons attribuées à Eudoxe ou à Théétète, de l'autre, la théorie proprement dite du cercle, c'est-à-dire le Livre III, auquel rien ne nous renvoie, car j'omets, comme sans valeur, l'assertion de Jamblique (*Simplicius* sur la Physique d'Aristote, 13, v), d'après laquelle ils auraient trouvé une quadrature du cercle.

Cependant ils avaient dû s'occuper spécialement du cercle que Pythagore disait être la plus belle des figures planes (*Diog. Laërce,* VIII, 19), et, en tout cas, la lacune n'aurait pas une importance relativement très grande.

L'insuffisance des preuves relatives à l'extension réelle des connaissances géométriques de Pythagore ne peut être niée ; cependant il me semble que l'on peut dire, en résumé, que ces preuves ont été un peu trop négligées, et que tous les témoignages concordent assez pour rendre probable l'opinion que j'ai avancée, que, en thèse générale, le premier Ouvrage mathématique dû à

---

(1) Il est à remarquer que le cas simple, où $m = 1$, peut se déduire immédiatement des théorèmes II, 5 et 6.

l'École de Pythagore présentait déjà le même cadre que les éléments géométriques d'Euclide et qu'il remplissait assez complètement ce cadre, si l'on excepte les théories générales sur les proportions, sur les incommensurables et sur les cubatures dérivant de la mesure de la pyramide.

CHAPITRE VIII.

Hippocrate de Chios.

1. La publication, vers le milieu du ve siècle avant notre ère, des immortelles découvertes de Pythagore devait entraîner une double conséquence :

D'une part, l'Égypte pourra encore être regardée par les Grecs comme la source vénérée où il faut aller puiser les connaissances traditionnelles; mais désormais, pour la Géométrie au moins, les élèves en remontreront à leurs maîtres.

D'un autre côté, les mathématiciens grecs sont maintenant en mesure d'aborder immédiatement des questions s'élevant déjà au-dessus des éléments, ou du moins dépassant le cadre dans lequel Euclide les a renfermés.

Je reviendrai sur le premier point; quant au second, il suffit de remarquer que c'est en effet à l'époque précitée que remontent les problèmes de la quadrature du cercle, de la construction géométrique de la racine cubique, enfin de la division de l'angle dans un rapport donné.

C'est sans aucun doute pour ce dernier problème qu'Hippias d'Élis, sophiste contemporain de Socrate, inventa la *quadratrice,* premier exemple d'une courbe différente du cercle, et qui, contrairement aux habitudes classiques, doit avoir été construite par points ([1]). On sait d'ailleurs que son nom lui vient de ce que cette courbe se trouva conduire également à une solution du problème de la quadrature du cercle.

Mais cette quadrature, comme aussi la duplication du cube, nous ramène tout d'abord à Hippocrate de Chios.

([1]) *Voir* mes *Notes pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* VII_2, p. 278-283; 1883. — M. Allman (*Hermathena,* IV, 7, p. 220) a parlé d'une « organic motion » pour le tracé de la quadratrice; mais, depuis (XI, 11, p. 423, note), il a adopté mon opinion.

2. Sur ce géomètre, nous trouvons un assez curieux renseignement dans la *Morale d'Eudème*, attribuée à Aristote, mais qui est probablement de son disciple, l'historien des Mathématiques; Hippocrate est donné (VII, 14) comme exemple d'un homme d'une intelligence remarquable sous certains rapports, nulle sous d'autres; bon géomètre, il se montrait, pour le reste, comme hébété et stupide : ainsi, dans un voyage commercial, il perdit, par sa sottise, une somme considérable qui lui fut extorquée par les percepteurs du cinquantième (douane athénienne), à Byzance.

Aristote (*Météorol.*, I, 6) le cite d'autre part, avec son disciple Eschyle, pour rapporter leur opinion sur les comètes, analogue à celle des Pythagoriciens; c'est une preuve qu'Hippocrate cultivait également toutes les sciences de son temps.

Le récit de Jean Philopon (*Comment. in Arist. Phys.*, fol. 13), qu'il faisait le commerce sur mer, que, pris par des corsaires, il vint les poursuivre inutilement à Athènes, et que, s'y étant mis à fréquenter les écoles des philosophes, il devint ainsi un géomètre fameux, ne doit être regardé que comme une amplification du passage de la *Morale d'Eudème*, en sorte que les détails particuliers qu'il offre n'ont aucune valeur. Loin de supposer qu'il y avait déjà à Athènes, dès le milieu du ve siècle, des écoles scientifiques renommées, il est à croire bien plutôt qu'Hippocrate, après y avoir peut-être été amené par des affaires de commerce, se mit à y professer un des premiers ce qu'il avait appris dans sa patrie, auprès d'OEnopide. Quoiqu'il connût d'ailleurs la Géométrie pythagoricienne qui venait d'être publiée, rien ne prouve qu'il ait eu des Pythagoriciens pour maîtres, car les témoignages tirés de Jamblique à cet égard reposent sur une fausse interprétation des passages que nous avons vus.

Je ne trouve pas non plus que les anciens emploient, en général, un ton défavorable en parlant d'Hippocrate, ainsi que le dit M. Allman (*Hermath.*, IV, 7, p. 227). Si l'on écarte pour le moment les passages d'Aristote sur la quadrature des lunules, passages sur lesquels nous reviendrons plus loin, il est certain que le Stagirite, ainsi qu'Eudème, parle d'Hippocrate, en tant que savant, en termes très honorables; de même Jamblique. Ératosthène, dans sa *Lettre à Ptolémée* [1], ne le maltraite pas plus que les autres

---

[1] Eutocius sur Archimède (*Sphère et cylindre*, II, 2.

géomètres. Proclus (p. 213 = Geminus) est très louangeur : « On dit que la première ἀπαγωγή (réduction d'un problème à un autre) sur les figures difficiles a été faite par Hippocrate de Chios, celui qui a aussi quarré la lunule et a fait en Géométrie nombre d'autres découvertes, ayant eu, autant que pas un autre, un génie naturel pour ces questions. »

Quant aux témoignages d'Alexandre d'Aphrodisias, de Philopon, d'Eutocius, ils ont d'autant moins de valeur qu'ils se rattachent à une opinion erronée sur un paralogisme, faussement attribué à Hippocrate au sujet de la quadrature du cercle, ainsi que nous le verrons.

3. J'ai déjà fait observer que le témoignage sur l'*apagoge* employée par Hippocrate doit, ainsi que toute la tradition sur le problème de Délos, provenir non pas d'Eudème, mais d'Ératosthène. Ce dernier, dans sa lettre à Ptolémée, nous montre, bien avant l'oracle rendu aux Déliens, le problème de la duplication du cube déjà célèbre à Athènes; un poète tragique (Euripide?) l'a mis sur la scène. Minos, voulant élever un monument à son fils Glaucus, dit à l'architecte :

Pour un tombeau royal, tu le prends bien petit;
Il faut doubler le cube et ne pas t'y tromper.

Ératosthène ajoute qu'Hippocrate ramena ce problème à l'invention de deux moyennes proportionnelles, et prétend qu'il n'alla pas plus loin, ce dont il est permis de douter dans une certaine mesure (¹).

Si c'est là d'ailleurs la plus ancienne *apagoge* que constate l'histoire, il est difficile de croire qu'elle ait réellement été la première; Hippocrate avait dû trouver des exemples dans la Géométrie pythagoricienne, qui présentait déjà des démonstrations par l'absurde, et qui sans doute n'était pas astreinte à exposer directement la solution de tous les problèmes, en rejetant la marche d'invention, nécessairement *apagogique*, du moment où la question est un peu compliquée.

(¹) Hippocrate était certes capable de ramener ce problème à une νεῦσις (inscription entre deux droites données d'une droite de longueur donnée et dont le prolongement passe par un point donné), ce qui est le principe de la solution de Nicomède par la conchoïde.

Nous touchons ici évidemment à l'invention de la méthode analytique que la tradition attribue à Platon. Il est douteux que cette tradition remonte effectivement à Eudème, mais elle doit déjà avoir été admise par Geminus; voici, au reste, le passage de Proclus sur ce sujet (p. 211, 14-212, 4).

« Pour l'invention des lemmes, le plus important est une disposition spéciale de l'intelligence; car on peut voir nombre de gens trouvant rapidement des solutions sans se servir de méthodes : tel nous avons connu Kratistos, si capable pour résoudre une question avec aussi peu de principes que possible, qui cependant ne s'aidait que de son naturel. Cependant on donne des méthodes; la plus belle est celle par l'analyse, qui ramène le cherché à un principe connu; c'est celle que Platon, à ce que l'on dit, fit connaître à Léodamas, et grâce à laquelle ce dernier est connu comme auteur de nombreuses découvertes en Géométrie. La seconde est la méthode de division, qui décompose en ses parties le genre proposé, et fournit un point de départ pour la démonstration de la construction du proposé, en éliminant les éléments étrangers; cette méthode a aussi été célébrée par Platon comme un utile auxiliaire dans toutes les sciences. En troisième lieu vient la méthode de réduction à l'impossible, qui ne démontre pas directement la chose cherchée, mais réfute la contradictoire et arrive ainsi indirectement à la vérité. »

4. De même que les autres légendes que nous avons déjà rencontrées sur le rôle de Platon comme géomètre, celle-ci doit nous inspirer une certaine défiance.

Tout d'abord, nous voyons, dans le passage de Proclus, la méthode analytique associée à une autre à laquelle le nom de Platon est également attaché. Mais il est clair que les classifications dichotomiques, telles que le philosophe en développe l'usage dans ses dialogues du *Sophiste* et du *Politique*, n'ont pas grand' chose à voir avec la Géométrie, et que la perfection des définitions ou l'ordre des théorèmes dans les éléments n'ont guère de liaison avec cette prétendue méthode de division.

Si, d'autre part, nous considérons la méthode analytique en elle-même, telle que nous la voyons pratiquée dans Apollonius et

dans Pappus, nous n'y pouvons voir qu'une *apagoge* successive du problème posé à un autre, jusqu'à ce que l'on arrive à un problème connu; il nous est dès lors impossible de reconnaître en quoi, sur ce point, aurait consisté la découverte de Platon.

La réduction à l'absurde correspond naturellement, pour les théorèmes, à la marche apagogique pour les problèmes; cependant nous trouvons pour les théorèmes, par exemple dans les scholies sur le commencement du XIIIe Livre, des démonstrations par voie analytique; la relation à démontrer est supposée vraie et on la transforme successivement jusqu'à ce que l'on arrive à une relation admise dans l'énoncé. Serait-ce là l'invention de Platon?

Tel est, semble-t-il, le sens dans lequel il faut entendre ce qu'en dit Proclus : il parle, en effet, non de problèmes, mais de lemmes; le procédé dont il s'agit n'est nullement propre à l'invention; il sert, au contraire, naturellement pour la vérification et se trouve donc applicable à la démonstration des lemmes que l'on peut rencontrer admis par un auteur, sans que l'on en reconnaisse immédiatement la vérité. Mais cette question des lemmes n'a surgi que longtemps après Platon, et, en tout cas, l'importance de la découverte qu'on lui attribue se trouverait singulièrement restreinte.

Cependant l'introduction d'un personnage d'ailleurs aussi peu connu que Léodamas de Thasos [1] semble indiquer que cette légende est ancienne et qu'elle repose sur quelque fondement plausible. Mais si, comme il semble convenable, on recherche un tel fondement dans les écrits de Platon, on est conduit à une conjecture toute différente de celles qui précèdent.

Nulle part, Platon ne fait allusion à une méthode géométrique qu'il aurait inventée; mais il y a une méthode philosophique qu'il a décrite à la fin du livre VI de la *République*, et à laquelle tous ses disciples ont attaché une grande importance : remonter de

---

[1] C'est à un Léodamas qu'est adressée la Lettre XI attribuée à Platon; il ne s'agit nullement de Géométrie, mais d'une constitution politique pour une colonie dont l'ami de Platon semble un des fondateurs. Le philosophe serait déjà vieux, ce qui n'est pas d'accord avec la chronologie du résumé historique de Proclus, le Socrate dont il est parlé dans la Lettre doit être Socrate le Jeune, dont parle Aristote (*Métaph.*, VI, 11): mais c'est peut-être un personnage fictif.

l'hypothèse au principe non supposé; suivre la marche inverse du principe à l'hypothèse (1).

Nous retrouvons là l'opposition constante dans les démonstrations anciennes entre l'*analyse* et la *synthèse;* c'est par un singulier abus de langage que l'on appelle aujourd'hui *synthétiques* les démonstrations géométriques d'Euclide; il n'y a chez les anciens de *synthèse* que quand il y a eu *analyse,* que quand on recompose en ordre inverse la suite des propositions obtenues suivant la marche opposée (2).

Aujourd'hui, nous ne faisons plus de synthèses, parce qu'il est de règle de ne procéder en analyse que par conclusions immédiatement réversibles. « Si A est vrai, B est vrai » n'est employé que si l'on peut dire : « B est vrai, donc A est vrai ». Il est rare que les anciens aient été assez assurés de la pratique de leurs procédés pour se croire dispensés de faire la contre-épreuve, la synthèse après l'analyse (3).

Ainsi, nous serions tentés de croire que l'œuvre de Platon aurait été de remarquer la convenance de la double marche et de régulariser ainsi, en lui donnant une complète rigueur logique, les procédés antérieurs d'une analyse incertaine et mal assurée. Mais la question reste trop douteuse pour qu'il soit possible de lui donner une solution précise.

5. J'aborde maintenant les recherches d'Hippocrate sur la quadrature du cercle, ou plutôt sur celle des lunules; mais je dois d'abord expliquer comment ces recherches nous ont été conservées.

Aristote parle, à diverses reprises, de la quadrature du cercle comme d'un problème non résolu; il distingue, parmi les fausses solutions données, deux sortes : les unes, purement sophistiques,

---

(1) Dans ce passage, Platon s'exprime d'ailleurs sur la Géométrie en termes qui ont pu servir de point de départ à la légende sur la méthode analytique, mais dont la signification est en réalité toute différente.

(2) Il est facile de se rendre compte que la marche d'Euclide ne suppose nullement, en thèse générale, une analyse préalable. Pour Archimède, la question peut être toute différente.

(3) Et encore, dans ce cas, ont-ils l'habitude, comme Diophante, d'indiquer que la synthèse reste à faire, mais qu'elle va de soi.

s'attaquent aux principes mêmes de la Géométrie : telles sont celles d'Antiphon et de Bryson; il leur oppose celles qui, tout en respectant les principes de la Science, contiennent de faux raisonnements, comme celui d'Hippocrate ou la quadrature par les lunules (*Soph.*, *Elench.*, 11) ou bien encore la quadrature par les segments (*Phys.*, I, 2) (1).

On doit encore remarquer un passage (*Analyt. prior.*, II, 25) où Aristote fait une allusion assez claire à un théorème d'Hippocrate, que nous verrons tout à l'heure.

« Ainsi (c'est un exemple d'*apagoge*), soit Δ la quadrature, E le rectiligne, Z le cercle; si entre E et Z il n'y avait qu'un seul intermédiaire, l'égalité à un rectiligne de la somme du cercle et de lunules, on serait près de la connaissance (2). »

Hippocrate avait, en effet, construit une lunule dont la somme avec un cercle est quarrable; Aristote veut dire que si c'était là le seul intermédiaire à chercher pour la quadrature du cercle, celle-ci serait obtenue; mais il en faudrait un second, à savoir la quadrature de la lunule particulière en question; c'est là, du moins, ce qu'on doit supposer qu'il sous-entend (3).

En tout cas, nous pouvons constater qu'Aristote connaît au moins un faux raisonnement, peut-être deux, conduisant à une prétendue quadrature du cercle par les lunules ou par les segments; le texte ajoute une fois le nom d'Hippocrate. Mais, pour accepter comme pleinement valable l'accusation ainsi lancée contre le géomètre de Chios, il faudrait être assuré :

1° Que cette mention d'Hippocrate vient bien d'Aristote lui-même et n'a pas été introduite dans le texte, dès une époque d'ailleurs très ancienne, à la suite d'une glose sans valeur, provoquée par le terme de *lunule;*

---

(1) Dès le ve siècle, la quadrature du cercle était à Athènes un problème aussi célèbre que la duplication du cube; Aristophane (*Oiseaux*) met sur la scène l'astronome Méton proposant une solution (mécanique?).

(2) L'emploi de lettres arbitrairement choisies pour désigner des concepts, emploi dont on voit ici un exemple, est très fréquent dans Aristote; il n'en fallut pas moins deux mille ans avant que Viète introduisît cet emploi dans l'Algèbre.

(3) Même ainsi, au reste, l'exemple est assez mal choisi; car, en réalité, il n'y a pas *apagoge* de la quadrature du cercle à celle de la lunule, puisque cette dernière quadrature est, dans le cas général, plus compliquée que celle du cercle.

2° Qu'Aristote était incapable de faire une pareille accusation à la légère, sur un point qui n'avait pas d'importance pour lui, alors qu'il lui arrive assez souvent d'attribuer sciemment à Platon et à d'autres des erreurs qu'il réfute, mais dont ils ne sont nullement coupables.

6. Les commentateurs d'Aristote se sont préoccupés d'expliquer en quoi consistaient au juste les quadratures dont parle le Stagirite. Pour Antiphon, il n'y a guère de difficulté; partant du triangle équilatéral (Thémistius) ou de tout autre polygone régulier inscriptible dans le cercle (Simplicius), il doublait le nombre des côtés jusqu'à arriver, disait-il, à la coïncidence avec le cercle. On doit d'ailleurs supposer qu'il ne proposait nullement ce procédé au point de vue pratique, mais bien au point de vue théorique, et dès lors les critiques d'Aristote sont parfaitement justes ([1]).

Il convient de remarquer que Simplicius parle d'après Alexandre d'Aphrodisias, mais cite également Eudème; toutefois, comme il n'ajoute pas que c'est d'après l'*Histoire géométrique* de ce dernier, il faut entendre qu'il emprunte cette citation à un Commentaire sur la Physique d'Aristote. Ce Commentaire d'Eudème et celui d'Alexandre d'Aphrodisias, également perdu, forment en effet les deux sources principales auxquelles Simplicius emprunte le sien.

Pour Bryson, la question est moins claire; d'après Alexandre d'Aphrodisias, il inscrivait un carré dans le cercle et y circonscrivait un autre carré; puis il construisait un troisième carré intermédiaire entre les deux premiers et prétendait qu'il était égal au cercle, comme étant, en même temps que celui-ci, plus grand ou plus petit que les premiers carrés. Philopon rapporte que le maître de Proclus, Syrianus, rejetait l'assertion du commentateur du IIe siècle après J.-C., et il me paraît en effet difficile de la prendre au sérieux. Mais on n'a, pour cela, aucunement le droit de considérer Bryson comme un précurseur d'Archimède; car, quel que fût

---

([1]) Antiphon paraît avoir été un sophiste athénien contemporain de Socrate, par conséquent d'Hippocrate de Chios; Bryson, fils d'Hérodore, d'Héraclée, appartient à la génération suivante: son enseignement semble avoir été voisin de celui des éristiques de Mégare; il a, d'autre part, composé des écrits moraux sur le modèle de ceux des Pythagoriciens de la même époque.

son raisonnement, il n'avait certainement aucune portée pratique. Peut-être même cherchait-il seulement à établir l'existence d'un certain carré équivalent au cercle.

Enfin, au sujet d'Hippocrate, Simplicius, dans son Commentaire sur la Physique d'Aristote, rapporte deux témoignages essentiellement différents : l'un d'Alexandre d'Aphrodisias, l'autre tiré de l'*Histoire géométrique d'Eudème*.

L'édition d'Alde Manuce (1526) est si incorrecte pour le fragment d'Eudème que, malgré son importance capitale, il a été négligé jusqu'à Bretschneider; tous les historiens antérieurs ont donc admis ce que rapportait Alexandre d'Aphrodisias : Hippocrate aurait quarré la lunule dont l'arc extérieur est de 180°, l'intérieur de 90°; il aurait ensuite prétendu quarrer le cercle comme suit :

Si l'on partage une demi-circonférence de rayon R en trois parties égales, et que, sur les cordes égales au rayon, on décrive des demi-circonférences extérieures, on obtiendra trois lunules telles que, si on leur ajoute un demi-cercle de diamètre R, la somme sera égale au demi-hexagone inscrit dans le demi-cercle de rayon R. La quadrature du demi-cercle de diamètre R est donc ramenée à celle de la lunule, et cette dernière est supposée quarrable. L'erreur consiste en ce que, dans cette figure, la lunule a son arc intérieur de 60° seulement et n'est donc aucunement assimilable à la lunule déjà quarrée. Ce serait là le faux raisonnement auquel Aristote fait allusion.

7. Bretschneider (1870) parvint le premier à expliquer convenablement l'extrait d'Eudème conservé par Simplicius, et par reconnaître qu'aucun paralogisme n'y est attribué à Hippocrate; qu'au contraire on trouve dans cet extrait une suite de théorèmes aussi intéressants qu'irréprochables.

Quoique le document ne remonte pas à Hippocrate lui-même, il n'en serait pas moins inappréciable pour permettre de juger des connaissances géométriques de son époque, si malheureusement Simplicius, sous prétexte d'éclaircir un texte trop concis, ne s'était pas avisé d'y introduire des explications de son cru et de malencontreux développements, qui le défigurent singulièrement. La restitution du texte d'Eudème devient dès lors assez difficile pour

que Bretschneider ait été entraîné à de graves erreurs, notamment à dénier à Hippocrate la connaissance de la propriété caractéristique des segments semblables, à savoir que tous les angles inscrits y sont égaux.

M. Allman (*Hermathena*, IV, n° 7, p. 196-202; 1881) a, le premier, donné une traduction du texte d'Eudème, en le débarrassant des interpolations de Simplicius, d'après des règles dont l'application peut être discutée dans les détails, mais dont les principes sont hors de conteste. L'année suivante (Berlin, 1882), paraissait l'édition critique du Commentaire de Simplicius sur les quatre premiers Livres de la Physique d'Aristote, avec un texte singulièrement amélioré et un essai de distinction des interpolations dans le fragment d'Eudème (p. 61-68). Pour cette distinction, le savant éditeur, H. Diels, s'était aidé des lumières de M. Usener de Bonn, qui, en procédant suivant des principes analogues à ceux de M. Allman, est arrivé à des résultats concordants sur divers points, divergents sur d'autres. M. Diels a, d'autre part, inséré dans sa Préface, à la suite de remarques de M. Usener (p. XXIII-XXVI), quelques pages (XXVI-XXXI) d'observations critiques qu'il m'avait demandées, et dans lesquelles, tout en proposant des explications ou des corrections particulières pour certains passages obscurs, j'ai soutenu une partie des conclusions de M. Allman, en abandonnant les autres.

J'ai repris depuis la question dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (V_2, p. 179-187; 1883), où j'ai publié le texte d'Eudème tel que je le comprenais, accompagné d'une traduction et des observations nécessaires. Enfin, M. Heiberg (*Philologus*, XLIII, 2, p. 337-344) a soumis ma restitution à une critique détaillée et proposé ses opinions sur divers points spéciaux.

La question ne peut évidemment être considérée comme épuisée; mais les lignes générales de la restitution sont désormais suffisamment assurées. S'il m'a paru, au reste, utile d'en rappeler l'historique, je crois sans intérêt de rentrer ici dans la controverse particulière; je vais donc me contenter d'exposer dans le langage moderne la théorie que renferme le texte en question; je ferai seulement deux remarques préalables.

Autant qu'on en peut juger, la forme des démonstrations d'Hippocrate était déjà, à très peu près, celle d'Euclide; il n'ignorait

d'ailleurs aucun des théorèmes fondamentaux sur le cercle, fait d'autant plus important à constater que, pour cette théorie, nous avons moins de données relatives aux connaissances des Pythagoriciens.

Il avait démontré la proportionnalité des surfaces des cercles aux carrés des rayons et des surfaces de segments semblables aux carrés des cordes; malheureusement, nous ignorons si son principe de démonstration contenait, en germe, la méthode d'exhaustion, dont l'invention doit donc être laissée à Eudoxe.

8. Du théorème sur les surfaces des segments découle immédiatement le principe de la quadrature des lunules.

Si l'arc extérieur est à l'intérieur dans un rapport de similitude $\frac{m}{n}$, qu'on divise le premier en m, le second en n parties égales, et qu'on joigne dans chaque arc les points de division voisins (y compris les extrêmes), on retranchera ainsi de la lunule m segments, on en ajoutera n, et l'on passera ainsi au rectiligne formé par les cordes.

Ce rectiligne sera donc équivalent à la lunule, si les n segments ajoutés forment une surface égale à celle des m segments retranchés. Comme d'ailleurs tous ces segments sont semblables entre eux, il faudra donc que les carrés des cordes qui divisent les arcs extérieur et intérieur (ou bien ceux des rayons de ces arcs) soient entre eux dans le rapport $\frac{n}{m}$.

Pour que la lunule soit réellement quarrable, il faut, en outre, que la figure puisse être construite avec la règle et le compas, ce qui a lieu pour cinq valeurs déterminées de $\frac{m}{n}$, à savoir $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{5}{3}$; il y a donc cinq lunules quarrables.

D'après Eudème, Hippocrate a donné la quadrature des trois premières, et le fait qu'il passe de la deuxième à la troisième, et non à celle pour laquelle $\frac{m}{n} = \frac{4}{1}$, montre suffisamment qu'il se proposait effectivement de construire les lunules, et, quoique Eudème n'ait pas conservé ces constructions, sauf pour la première, quoiqu'il ait seulement ramené les autres à des problèmes déterminés, on ne doit pas douter qu'Hippocrate n'ait résolu ces problèmes; le premier est en fait assez simple, le second suppose la solution géométrique de

l'équation du second degré; mais nous avons admis que cette solution était déjà connue des Pythagoriciens.

Dans un quatrième théorème, Hippocrate a construit une lunule dont la somme avec un cercle se trouve quarrable.

Le cercle ayant R pour rayon, l'arc extérieur de la lunule est de 120° et son rayon $R\sqrt{6}$, l'arc intérieur est de 60°; la somme quarrable est égale au triangle maximum inscrit dans l'arc extérieur, plus l'hexagone inscrit dans le cercle [1].

9. En présence du témoignage d'Eudème, celui d'Alexandre d'Aphrodisias perd toute valeur; on doit cependant se demander quelle peut en être l'origine, et, d'autre part, à quelle fausse quadrature Aristote a pu faire allusion.

MM. Allman et Heiberg maintiennent encore que cette fausse quadrature peut être imputée à Hippocrate.

Le premier admet que ce dernier, élève des Pythagoriciens, aura publié, sans les bien comprendre, des travaux dus à ses maîtres, et qu'il aura pu, dès lors, y ajouter le paralogisme rapporté par Alexandre d'Aphrodisias.

Le second distingue deux fausses quadratures visées par Aristote : l'une, par les lunules, serait celle rapportée par Alexandre; l'autre, celle d'Hippocrate, ou par les segments, dériverait du dernier théorème développé par Eudème, et auquel Aristote, ainsi qu'on l'a vu, fait allusion ailleurs (*Analyt. prior.*, II, 25); l'erreur aurait encore consisté à prendre comme quarrable la lunule qui figure dans ce dernier théorème, quoiqu'elle diffère, essentiellement et à première vue, de chacune des trois lunules d'Hippocrate.

---

[1] Il est facile de voir que le triangle en question se trouve lui-même équivalent à l'hexagone.

La solution d'Hippocrate peut être facilement généralisée.

Soient $\frac{2\pi r}{m}$ l'arc extérieur, $\frac{2\pi R}{n}$ l'arc intérieur qu'on supposera être tous deux des fractions de la circonférence susceptibles d'être obtenues avec la règle et le compas; soit ρ le rayon du cercle à ajouter; on le construira d'après la relation

$$\rho^2 = \frac{R^2}{n} - \frac{r^2}{m}.$$

Si l'on a

$$\frac{r^2}{m} - \frac{R^2}{n} > 0 \quad \text{et} \quad = \rho'^2,$$

c'est l'excès de la lunule sur le cercle du rayon ρ' qui sera quarrable.

Cette conjecture d'Heiberg me paraît assez plausible, sauf pour ce qui concerne l'attribution du paralogisme à Hippocrate; car la mention de son nom par Aristote ne me paraît nullement, ainsi que je l'ai fait voir, constituer une preuve irrécusable. Je ne crois pas non plus qu'Hippocrate ait eu des Pythagoriciens pour maîtres, ou je ne vois pas de raison sérieuse pour supposer que le disciple n'ait pas égalé ses professeurs anonymes.

L'exemple de Grégoire de Saint-Vincent prouve certainement qu'un géomètre de valeur peut se laisser entraîner à des paralogismes dans la recherche d'un problème tel que celui de la quadrature du cercle; mais encore on ne peut admettre un paralogisme grossier et, d'autre part, conduisant à des conséquences dont l'inexactitude crève les yeux.

Si un véritable géomètre a cru pouvoir tirer de la théorie des lunules une quadrature du cercle, il a dû effectuer la construction; or, si l'un des paralogismes que nous avons vus conduisait à une valeur de π comprise entre 3 et $3\frac{1}{3}$ (limites pratiquement reconnues avant Archimède, d'après Aristarque de Samos), nous pourrions peut-être croire qu'Hippocrate, après avoir commis ce paralogisme, ne l'aurait pas reconnu. Mais que dire, quand les prétendues quadratures nous amènent pour π à des valeurs voisines de 4 ou dépassant ce nombre?

Aucun géomètre n'a jamais pu s'y laisser prendre; il n'y a jamais eu là que des sophismes d'école, analogues à tant d'autres plaisanteries rapportées par Aristote, et dont la tradition s'est perpétuée jusqu'à nous, même en Géométrie. Il est possible d'ailleurs qu'Euclide ait conservé un de ces sophismes dans ses Ψευδάρια, qu'Alexandre d'Aphrodisias connaissait encore, et dont il aura pu le tirer, en croyant y retrouver celui que le texte d'Aristote attribuait à Hippocrate.

Mais ce dernier doit être hautement reconnu comme bien au-dessus de cette accusation, et, loin de voir dans son dernier théorème une tentative d'arriver à la quadrature du cercle par celle des lunules, il faut y constater la conscience très nette de ce fait que la quadrature générale des lunules dépend de celle du cercle et, les cas singuliers mis à part, ne peut être obtenue directement.

CHAPITRE IX.

Démocrite et Archytas.

1. J'ai dit qu'à partir du milieu du v[e] siècle avant notre ère, grâce aux découvertes de Pythagore, les géomètres hellènes étaient capables d'en remontrer aux Égyptiens.

Un fragment célèbre de Démocrite (dans Clément d'Alexandrie, *Strom.*, I) nous le montre déjà se vantant que, « pour la composition des lignes avec démonstration, il n'a pas trouvé son maître, même parmi les *harpédonaptes* (¹) égyptiens, comme on les appelle, et qu'il connaît par une pratique de cinq ans ».

Des Grecs ont donc pu encore aller s'instruire en Égypte et y chercher, notamment comme Eudoxe, des données astronomiques, fruit d'une longue observation; mais, en Géométrie, ils n'avaient plus rien à apprendre. Il est à noter que Platon, qui fit lui-même un voyage scientifique sur les bords du Nil, et qui se plaît à rehausser souvent la sagesse des prêtres égyptiens, n'hésite cependant pas (*République*, IV, 436 *a*) à qualifier leur nation de φιλοχρήματον (avide de richesses) et à opposer le φιλομαθές (l'avidité d'instruction) des Hellènes (²).

(¹) Ce mot, dérivé de ἁρπεδόνη (cordeau) et ἅπτειν (toucher), est franchement grec. *Voir* au reste Cantor (*Vorlesungen*, t. I, p. 55-57). On remarquera l'expression particulière (γραμμέων συνθέσιος μετὰ ἀποδείξιος) dont se sert Démocrite pour désigner la Géométrie : elle spécifie la nature des questions que traitaient surtout les arpenteurs égyptiens, et nous rappelle les Çulvasûtras (règles du cordeau) des anciens Hindous.

(²) Sans tomber dans les rêveries d'illustres savants qui ont voulu trouver dans les pyramides de Gizeh des preuves de connaissances mathématiques supérieures, il est permis de demander s'il est possible que les Égyptiens aient pu, par exemple, construire leurs pyramides sans être capables de les cuber; mais on doit répondre par l'affirmative. Khéops et Khéphrên n'étaient pas astreints à un budget par exercice et n'ont eu besoin d'aucun devis. L'approximation grossière dont se contentaient les Égyptiens pour la mesure de leurs champs non rectangulaires n'avait même pas à être atteinte pour leurs constructions. Enfin, 500 ans après notre ère, dans l'Inde, dont la civilisation était au moins égale et où la science grecque avait pénétré, Aryabhatta mesure encore une pyramide comme *moitié* du produit

2. Il ne sera pas hors de propos de nous arrêter un moment sur le savant universel qui illustra la fin du v[e] siècle. Si le nom de Démocrite manque sur la liste de Proclus, il n'en paraît pas moins avoir fait en Mathématiques des travaux considérables; il est vrai que son influence comme géomètre ne semble pas cependant avoir été considérable, car il resta en dehors du cercle d'Athènes, où ses écrits ne paraissent même pas avoir été connus ou au moins appréciés avant le temps d'Aristote.

Diogène Laërce nous a conservé, d'après Thrasylle, les titres des Ouvrages mathématiques de Démocrite, et nous savons qu'ils devaient être divisés en trois tétralogies. Malheureusement ces titres sont d'autant plus insuffisants que le philosophe d'Abdère semble avoir une terminologie à lui, qui n'est pas devenue classique, et que nous ne connaissons guère; que d'autre part les textes des manuscrits sont passablement incertains.

Voici comment je restitue les tétralogies :

I. 1° Περὶ διαφορῆς γνώμης ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρας. — Sur une divergence d'opinions ou sur le contact du cercle et de la sphère.

2° Περὶ γεωμετρίης ἢ γεωμετρικόν. — Traité de Géométrie.

3° Ἀριθμοί. — Les nombres.

4° Περὶ ἀλόγων γραμμέων καὶ ναστῶν β′. — Deux Livres sur les lignes et solides irrationnels.

II. 1° Ἐκπετάσματα. — Développements (?). Le mot est-il pris au figuré? S'agissait-il de développements sur un plan de surfaces cylindriques et coniques ou de simples rabattements de faces de polyèdres?

2° Μέγας ἐνιαυτὸς ἢ ἀστρονομίη. — La grande année en Astronomie (on sait que la grande année est le cycle après lequel les planètes sont supposées revenues à leurs points de départ).

---

de sa base par sa hauteur. Tant les connaissances essentiellement pratiques peuvent rester erronées, quand leur exactitude n'est pas indispensable!

Et ce même auteur connait π avec une approximation plus grande que celle d'Archimède! Mais c'est que son astronomie est relativement avancée; cette valeur ($\pi = 3,1416$) doit d'ailleurs avoir été déduite des Tables des cordes de Ptolémée.

3° Παράπηγμα. — Calendrier de levers et couchers de fixes, avec prédictions météorologiques. Un certain nombre de données empruntées à cet Ouvrage sont consignées dans le dernier Chapitre de l'*Introduction aux Phénomènes* de Geminus.

4° Ἅμιλλα κλεψύδρας. — Le débat de la clepsydre. — Probablement relatif à l'emploi de cet instrument en Astronomie, comparé aux moyens de mesure du temps par l'observation des astres.

III. 1° Οὐρανογραφίη. — Description du ciel.

2° Γεωγραφίη. — Il est à remarquer que Démocrite, fidèle en cela à la tradition ionienne, représentait encore la Terre comme plate.

3° Πολογραφίη. — Le *polos* était le cadran solaire emprunté aux Babyloniens, et qui avait la forme d'un hémisphère creux avec l'extrémité du style au centre.

4° Ἀκτινογραφίη. — Peut-être l'Ouvrage de perspective dont parle Vitruve et que Démocrite aurait écrit après celui d'Anaxagore.

3. Si l'ordre des Ouvrages est attribuable à Thrasylle, la succession de ceux, I, 2, 3, 4 n'en est pas moins notable comme correspondant exactement au cadre des *Éléments* d'Euclide; on voit d'ailleurs que Démocrite avait peut-être devancé Théétète en traitant des irrationnelles.

Quant à l'Ouvrage I, 1, il me paraît se rapporter à une polémique dirigée contre Protagoras (*voir* Aristote, *Métaph.*, II, 2), qui soutenait que le contact d'un cercle matériel et d'une règle se faisait sur plus d'un point.

D'après un fragment conservé par Plutarque (*Adv. Stoic. de commun. notit.*, p. 1079), Démocrite se serait occupé d'une question du même ordre en discutant si deux sections d'un cône par deux plans parallèles à la base et infiniment voisins devaient être considérées comme égales ou inégales. Malheureusement Plutarque ne donne pas la solution de cette difficulté.

Pour se rendre compte exactement de la position de Démocrite au sujet de ces questions, il convient de se rappeler qu'il y était naturellement amené par sa théorie des atomes.

Cette théorie a en réalité son origine dans les doctrines des Py-

thagoriciens, avec lesquels Démocrite a eu des rapports incontestables qui, d'ailleurs, n'enlèvent rien à sa profonde originalité. Les opinions physiques des premiers Pythagoriciens étaient en fait beaucoup plus grossières que leurs connaissances mathématiques ne devraient le faire supposer; ils considéraient l'univers comme constitué d'un côté par un fluide continu et infini, qu'ils ne distinguaient pas de l'espace; de l'autre, par des points matériels qui formaient la substance des corps. Le point était pour eux « une unité douée de position » et les corps étaient donc des nombres, en tant qu'assemblages de quotités finies de points (1).

Ils ne distinguaient pas d'ailleurs ce point matériel du point géométrique; l'un et l'autre était reconnu comme indivisible (ἄτομον) et, en même temps, la divisibilité indéfinie des grandeurs était admise sans réserves. Cette conception insoutenable fut attaquée par Parménide et par Zénon, dont les célèbres paradoxes doivent uniquement (2) être considérés comme battant en brèche la fausse thèse qu'une ligne est une somme de points, une surface une somme de lignes, un solide une somme de surfaces, etc.

Les Pythagoriciens pouvaient d'autant moins se défendre que la découverte des quantités incommensurables (non encore publique du reste au temps de Zénon) devait leur faire sentir la grossièreté de l'erreur; ils durent donc transformer leur doctrine physique et soit lui donner, comme Philolaos, un sens purement idéaliste, soit attribuer aux atomes des dimensions très petites, mais finies; si d'ailleurs cette thèse fut surtout développée en dehors de l'École, par Leucippe, puis par Démocrite, elle fut reprise plus tard dans son sein même, par Ecphante, par exemple (3).

---

(1) Ce n'est qu'à partir de Philolaos que la formule du Maître « Les choses sont nombres » reçoit une explication idéaliste, toute différente. C'est aussi de la même époque que doivent dater les assimilations de la dyade à la ligne, de la triade à la surface, de la tétrade au solide.

(2) *Voir* mon article : *Zénon d'Élée et M. Georges Cantor,* dans la *Revue philosophique* de 1884.

(3) Il convient également de remarquer que la même thèse au fond est celle de Platon dans le *Timée,* avec la différence que ses atomes sont présentés comme des surfaces matérielles; son disciple Xénocrate admet au contraire des atomes qu'il représente comme des lignes. Aristote les a accusés à tort de paradoxes géométriques; les lignes de Xénocrate comme les surfaces de Platon ne doivent être conçues que comme des solides indivisibles sous des formes particulières.

Il n'en résulte pas moins que Démocrite devait considérer ses atomes comme de véritables solides géométriques et repousser nettement, en ce qui les concernait, l'opinion de Protagoras. Nous sommes moins édifiés pour ce qui concerne le fragment de Plutarque, mais nous n'avons aucune raison de supposer que le philosophe d'Abdère se soit prononcé contre les saines doctrines géométriques.

A partir de Zénon d'Élée, en effet, l'antique erreur pythagoricienne ne reparaît guère que dans la prétendue quadrature du cercle d'Antiphon, et encore sous une forme toute spéciale (¹).

4. Nous arrivons désormais, en suivant également la liste de Proclus et l'ordre chronologique, au dernier géomètre qui, malgré ses rapports avec Platon, doive être encore regardé comme étranger à l'Académie.

On sait qu'Archytas était pythagoricien et en même temps un homme d'État considérable à Tarente, sa patrie ; il fut élu sept fois stratège annuel et commanda en cette qualité les troupes de la confédération formée par les villes de la Grande-Grèce. Toutefois on connaît mal les dates de sa vie ; il semble que Platon soit entré en relations avec lui lors de son voyage en Italie, qui doit être placé vers 390 av. J.-C. Eudoxe doit de même avoir été son disciple avant 384, mais Archytas vivait encore vers 361 lors du troisième voyage de Platon en Sicile ; il ne semble donc pas avoir été sensiblement plus âgé que ce dernier (429-347).

A cette époque le pythagorisme n'était plus une école fermée, conservant précieusement la tradition du Maître ; ses adeptes professaient en fait des opinions personnelles très diverses et les publiaient librement. Archytas paraît avoir beaucoup écrit et nous possédons de longs fragments qui lui sont attribués. Mais, ou bien ils sont tirés de Traités surtout moraux (²) et n'intéressent guère l'Histoire des Sciences, ou bien ils sont apocryphes comme ceux

---

(¹) Le Traité pseudo-aristotélique Περὶ ἀτόμων γραμμῶν, *Sur les lignes indivisibles,* ne peut être regardé que comme un exercice d'école, n'ayant nullement trait à une polémique sérieuse.

(²) Le fragment Περὶ μαθημάτων (Stobée, *Flor.*, 43) se trouve lui-même dans ce cas.

qui font de lui l'inventeur des dix catégories d'Aristote ou qui lui font développer des idées appartenant à Platon [1].

Le début du Traité Περὶ Μαθηματικῆς, inséré par Porphyre dans son commentaire sur les *Harmoniques* de Ptolémée, et déjà cité par Nicomaque, est plus authentique. Mais ce Traité paraît avoir été exclusivement consacré à la musique (Nicomaque l'appelle d'ailleurs τὸ ἁρμονικόν) et nous pouvons ici le laisser de côté.

En fait nous ne connaissons, comme travail proprement mathématique d'Archytas, que sa singulière solution du problème des moyennes proportionnelles, telle qu'elle est rapportée, d'*après Eudème*, par Eutocius sur Archimède (*Sphère et Cylindre*, II, 2).

Il employait l'intersection du cylindre

$$x^2 + y^2 = ax,$$

du tore

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2},$$

enfin du cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2.$$

On peut en effet tirer de ces équations

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt[3]{ab^2}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

J'ai déjà dit que je ne pouvais considérer cette solution que comme purement théorique ; mais historiquement elle nous montre les géomètres de ce temps déjà suffisamment familiarisés avec les corps ronds et les solides de révolution, ayant, d'autre part, assez nettement le concept du lieu géométrique, sans lequel il est clair qu'Archytas n'aurait pu combiner ses constructions.

5. Si divers témoignages anciens concordent pour attribuer à la solution d'Archytas un caractère mécanique, c'est-à-dire pratique, ces témoignages proviennent d'auteurs comme Diogène Laërce ou Plutarque, très postérieurs et absolument incompétents.

---

(1) Ainsi le fragment ἐκ τοῦ περὶ νοῦ καὶ αἰσθήσεως (Stob., *Ecl.*, I), offre de singuliers rapports avec la fin du Livre VI de la *République*. C'est ce fragment que cite Jamblique (Villoison, *Anecd. Græc.*, II, p. 189) sous la mention ἐν τῇ τῆς γνωριστικῆς γραμμῆς τομῇ.

Le récit de Plutarque dans sa *Vie de Marcellus* est d'ailleurs intimement lié à la légende qui se forma, d'après les écrits de Platon, pour attribuer au philosophe le rôle d'avoir assuré, d'une façon décisive, le caractère purement abstrait des Mathématiques; je ne m'y arrête donc que pour relever une assertion du polygraphe.

D'après lui, Archytas et Eudoxe auraient été en réalité les précurseurs d'Archimède en Mécanique, et la Science de leur temps aurait eu un caractère essentiellement pratique. Or ceci est absolument contredit par tout ce que nous savons de la Géométrie ancienne, qui nous apparaît comme entièrement abstraite, à dater de Pythagore, et de la Mécanique ancienne, dont l'état avant Archimède nous est suffisamment indiqué par les *Problèmes* attribués à Aristote.

Pour ce qui concerne Eudoxe en particulier, l'assertion de Plutarque est également contradictoire avec ce que nous savons de lui; le Cnidien était un *sophiste* dans le vrai sens du mot, c'est-à-dire un homme universel pouvant professer sur tous les sujets, sur la Morale comme sur la Médecine; sur la Géométrie comme sur la Théologie; mais avant tout, pour nous, quelle que soit l'importance de ses travaux géométriques, c'est un astronome; c'est le premier qui ait proposé un système mathématique du monde, et c'est à lui qu'il faut faire remonter la presque totalité des théories contenues dans la *Petite Astronomie* des Grecs, c'est-à-dire la collection des écrits classiques antérieurs à Ptolémée. Comme Mécanique, au contraire, nous n'avons aucun indice tendant à prouver qu'il s'en soit occupé.

Pour Archytas, il est vrai que Vitruve paraît corroborer le témoignage de Plutarque; il donne en effet le Tarentin (éd. Rose, p. 10 et 160) comme un auteur ayant traité des machines avant Archimède [1]. Mais ici il paraît y avoir eu une confusion de nom.

---

[1] Archimède en réalité, d'après Carpos dans Pappus, n'avait composé qu'un traité mécanique spécial : *Sur la sphéropée*. Il est d'ailleurs hors de doute que si les machines de guerre de son invention ont été, dans l'antiquité, un des motifs principaux de sa réputation, ce n'était nullement un sujet neuf; des machines de ce genre existaient longtemps avant lui, et des ingénieurs d'Alexandre le Grand en avaient déjà traité.

Diogène Laërce (VIII, 82) nous dit en effet qu'il y a eu cinq Archytas, dont l'un, architecte, avait composé un Livre *Sur les machines*, et était l'élève d'un Teucer de Carthage. C'est sans doute à ce personnage que se rapportent en fait les données de Vitruve, et Plutarque peut avoir été sous l'influence de la même confusion.

On ignore quand pouvait vivre ce second Archytas, mais son existence suffit pour dénier au premier tout travail ou invention d'ordre mécanique, par exemple la colombe volante en bois dont parlait Favorinus, d'après Aulu-Gelle (X, 22). Tout au plus pourrait-on lui laisser la πλαταγή dont parle Aristote, c'est-à-dire un jouet d'enfant (crécelle ou castagnette?) (¹), si l'on ne voulait pas faire remonter aussi haut le disciple de Teucer.

6. Un *Archytas* nous apparaît encore, dans l'*Ars Geometriæ* attribué à Boèce, comme un géomètre célèbre : 1° ayant traité de l'*abacus* inventé par Pythagore (éd. Friedlein, p. 393-425); 2° auteur d'une règle pour la formation des triangles rectangles en nombres (²) (p. 408); 3° ayant démontré, *après Euclide*, que le diamètre du cercle inscrit dans un triangle rectangle est égal à l'excès sur l'hypoténuse de la somme des deux côtés de l'angle droit (p. 412); 4° ayant donné une règle spéciale pour le calcul du triangle obtusangle (³).

Que l'*Ars Geometriæ* soit l'œuvre d'un faussaire très postérieur à Boèce, c'est là un point qui, malgré l'opinion de M. Cantor, ne me paraît plus à discuter (⁴); que, malgré l'anachronisme indiqué plus haut, ce faussaire ait voulu désigner sous le nom d'*Archytas* le célèbre pythagoricien, cela me paraît également désormais hors de conteste; il n'en ressort pas moins que les trois données fournies sur son compte n'ont pas été inventées de toute pièce; il devait donc circuler vers le IXᵉ ou le Xᵉ siècle de l'ère

(¹) Diogenianus (III, 98) l'attribue formellement à l'ingénieur : ὁ Ἀρχύτας τέκτων.

(²) $(2a)^2 + (a^2 - 1)^2 = (a^2 + 1)^2$: c'est la règle que Héron et Proclus attribuent à Platon.

(³) La règle, faussée, est devenue incompréhensible.

(⁴) *Voir* WEISSENBORN, *Die Boetius-frage* (*Abhandlungen zur Gesch. der Math.*, II, p. 185-240 : 1879).

chrétienne, un Traité géométrique (ou d'arpentage?) écrit en latin et présenté comme traduit du grec du vieil Archytas.

L'existence d'écrits apocryphes d'Archytas, sur d'autres sujets, acceptés pourtant comme authentiques au ve ou au vi^{e} siècle après J.-C., peut bien nous porter à croire qu'en effet les auteurs de ces écrits y auront joint, pour épuiser le cercle parcouru par Archytas, un traité géométrique qui ne devait pas leur coûter davantage à composer.

Si l'*abacus* du moyen âge est bien, comme il semble, une invention connue au moins des Romains de l'Empire, il n'y aurait rien d'étonnant à ce que le pseudo-Boèce ait trouvé cette invention décrite dans ce traité du pseudo-Archytas; mais, même en adoptant cette conjecture, on n'en pourrait tirer aucune conclusion relativement à l'origine, soit des *apices* dits de Boèce, soit de nos chiffres modernes. Malgré la liaison historique entre ces chiffres et l'*abacus,* il y a là en effet deux questions essentiellement distinctes; tout semble prouver en effet que les *apices* de Boèce dérivent des chiffres arabes occidentaux, tandis que si l'*abacus* a été connu des Arabes, c'est qu'ils l'ont emprunté aux Latins.

CHAPITRE X.

Les géomètres de l'Académie.

1. Si l'on excepte Eudoxe de Cnide, la plupart des géomètres de l'Académie, qui figurent sur la liste de Proclus, sont des personnages peu connus.

Sans Proclus, nous ignorerions les noms de Néoclide, de Theudios, d'Athénée de Cyzique et d'Hermotime de Colophon (1).

On connaît deux platoniciens du nom de Léon; mais l'un, sophiste de Byzance et peut-être l'auteur du dialogue l'*Alcyon* (2), est de la génération suivante; l'autre (aussi appelé Léonidas) était d'Héraclée et, avec son compatriote Chion, périt en assassinant le tyran Cléarque; cependant, on ne peut faire ici aucune identification assurée.

Amyclas d'Héraclée est cité par Diogène Laërce (III, 46) comme disciple de Platon; mais (IX, 40) il le donne, d'après Aristoxène, comme pythagoricien et comme ayant, avec Clinias, empêché Platon de brûler les écrits de Démocrite; fable qui, malgré son ancienneté, ne mérite aucune créance.

Ménechme d'Alopéconnèse ou de Proconnèse (3), qui passe pour l'inventeur des sections coniques, et sur lequel revient Proclus, fut certainement, après Eudoxe, le mathématicien du ve siècle le plus en vue. Le grammairien Sérénus (J. Damasc., *Flor.*, 115) lui attribue d'avoir fait à Alexandre le Grand la réponse que Proclus met dans la bouche d'Euclide devant Ptolémée; on peut voir là un indice de la célébrité de Ménechme, en même temps qu'une preuve de la non-véracité de l'anecdote, soit d'un côté, soit de l'autre.

---

(1) J'ai déjà parlé de Léodamas, de Thasos, ainsi que de Théétète.

(2) Dans les Œuvres de Lucien. *Voir* Philostrate (*Vit. Soph.*) sur ce personnage.

(3) Suidas, v. Μάναιχμος. — Alopéconnèse est une ville de la Chersonnèse de Thrace, Proconnèse une île de la Propontide, deux localités en tous cas voisines de Cyzique, où Eudoxe fonda son école.

Un témoignage de Théon de Smyrne (*Astronom.*, p. 330) nous donne Ménechme comme introduisant dans le système astronomique d'Eudoxe les sphères dites ἀνελίττουσαι, ordinairement attribuées à Aristote, et dont l'effet supposé était purement mécanique. Ce témoignage est une preuve des relations qui, au dire de Proclus, existaient entre Eudoxe et Ménechme; mais les rapports de ce dernier avec Platon sont également confirmés par l'indication de Suidas; Ménechme aurait en effet, d'après celui-ci, composé, entre autres écrits philosophiques, trois Livres sur la *République*.

Eutocius (sur Archimède, *Sphère et Cyl.*, II, 2) nous a conservé deux solutions du problème de Délos, attribuées à Ménechme, l'une au moyen de deux paraboles, l'autre au moyen d'une parabole et d'une hyperbole. Comme je l'ai déjà dit, ces deux solutions ne proviennent pas d'Eudème, et leur authenticité est loin d'être suffisamment garantie; toutefois il est certain, par la lettre d'Ératosthène, que Ménechme avait employé les sections coniques pour résoudre le problème.

Dinostrate, frère de Ménechme, est cité par Pappus (IV, 250) comme ayant obtenu la quadrature du cercle avec la courbe connue sous son nom, mais qui fut probablement inventée auparavant par Hippias d'Elis.

Enfin Philippe de Medma (ou d'Oponte) fut un des disciples les plus chers de Platon; on le considère comme l'éditeur des *Lois* et comme l'auteur de l'*Épinomide;* il s'occupa surtout d'Astronomie, et Geminus, à la fin de son *Introduction aux phénomènes,* a conservé certaines dates fixées par lui pour les levers et couchers des fixes, d'après des observations faites, au dire de Ptolémée (Φάσεις ἀπλανῶν), dans le Péloponnèse, en Locride et en Phocide; Suidas (v. φιλόσοφος) nous a conservé vingt-trois titres de ses nombreux écrits; les dix suivants intéressent les Mathématiques :

Arithmétiques. — Médiétés. — Sur les nombres polygones. — Cycliques. — Optiques, 2. — *Énoptriques,* 2 (sur les miroirs). — *Sur la distance du Soleil et de la Lune. — Sur l'éclipse de la Lune. — Sur la grandeur du Soleil, de la Lune et de la Terre. — Sur les planètes.*

D'après un texte d'Aétius (*Doxographi græci*, éd. Diels,

p. 360), on pourrait conclure qu'il aurait le premier établi la théorie complète des phases de la Lune.

2. Eudoxe paraît être né vers 407, mort vers 354 avant J.-C. Son voyage en Égypte, avant lequel il n'était guère connu, semble devoir être fixé vers l'an 378. Mais, contrairement à l'opinion de Boeckh (*Sonnenkreise,* pp. 140-148), je croirais volontiers qu'il ouvrit son école de Cyzique presque immédiatement après son retour et qu'il vint à Athènes vers 367.

Cette école de Cyzique eut une grande célébrité, surtout en Astronomie; Eudoxe y eut, entre autres, comme disciples deux habitants de cette ville, Hélicon qui prédit une éclipse de Soleil à la cour de Denys ([1]), et Polémarque qui lui succéda, lorsqu'il partit pour Athènes, et qui fut le maître de Callippe ([2]). Il faut aussi évidemment rattacher à cette école Ménechme, Dinostrate et Athénée de Cyzique.

Voilà donc un centre scientifique important en dehors d'Athènes et de la véritable école de Platon; si Athènes finit par absorber ce centre par sa puissante attraction, il faut bien remarquer qu'Eudoxe s'y posa en rival de Platon et que si, surtout après sa mort, ses disciples purent subir l'influence du chef vénéré de l'Académie, ce fut plutôt en Philosophie qu'en Mathématiques.

Remarquons d'autre part que, si Théétète fut l'ami de Platon, il ne fut nullement son disciple, qu'il paraît s'être spécialement consacré aux Mathématiques et qu'il alla les professer à Héraclée ([3]). Il semble dès lors que c'est d'après une légende que nous a été tracé ce tableau conservé par Proclus, de géomètres vivant ensemble à l'Académie, c'est-à-dire sous la haute direction de Platon et faisant leurs recherches en commun. Athènes est sans doute, au IVe siècle, le foyer scientifique dont l'éclat efface tous

---

([1]) Plutarque (*De Genio Socratis*) donne Eudoxe et Hélicon comme les géomètres auxquels Platon aurait renvoyé les Déliens.

([2]) Le réformateur du cycle de Méton et du système d'Eudoxe; il vint à son tour s'établir à Athènes, où il se lia avec Aristote, après la mort de Polémarque, (μετ' ἐκεῖνον, *Simplicius, Comment. in Arist. de Cœlo*). On a jusqu'ici mal compris ce passage, en admettant qu'il était venu avec Polémarque (μετ' ἐκείνου) et simplement pour conférer avec Aristote.

([3]) *Voir* plus haut, p. 99, note 2.

les autres : tout géomètre devait peut-être y passer; mais on faisait de la Géométrie ailleurs, et d'autres villes cherchaient déjà à attirer des professeurs.

Enfin la prééminence scientifique d'Athènes est due, avant tout, à la prépondérance commerciale qu'elle conserve encore à cette époque; ces géomètres qu'elle réunit sont étrangers pour la plupart et, si Platon lui-même est Athénien, il n'y a là qu'un accident heureux, non pas la cause déterminante de cette réunion. Dans la liste de Proclus, il n'est guère que Philippe qui soit véritablement son disciple, sur lequel il ait dû exercer une influence bien marquée.

A la vérité, nous devons ajouter à cette liste, sinon le neveu et successeur de Platon, Speusippe, qui écrivit sur les *Nombres pythagoriques* [1], mais ne paraît pas s'être particulièrement occupé de Géométrie; au moins son second successeur, Xénocrate [2], et aussi Héraclide du Pont [3], un des plus brillants platoniciens, qui prit d'ailleurs une position personnelle et se rapprocha des doctrines adoptées par une fraction de l'école pythagoricienne.

Mais, même après cette adjonction, le rôle de Platon dans l'histoire de la Géométrie paraît singulièrement effacé vis-à-vis de celui d'Eudoxe.

3. Si nous pouvons essayer d'émettre quelques conjectures sur les progrès qu'accomplirent en Géométrie tous ces mathématiciens

---

(1) *Voir* mon étude sur le fragment conservé dans les *Théologoumènes* (*Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux,* t. V. p. 375-382; 1883).

(2) La liste des Ouvrages de Xénocrate pour ce qui concerne les Mathématiques (Diog. Laërce, IV, 13, 14) est loin d'être claire. On y voit d'abord (après les Livres dialectiques), quinze Livres, puis seize autres sur les *mathèmes;* les quinze premiers paraissent en comprendre neuf relatifs à la logique, six aux sciences; les seize seconds [en y ajoutant deux autres Livres sur l'intellect (διάνοια)?] semblent comprendre : 1° cinq Livres géométriques, *Commentaires.* — *Contraires.* — *Sur les nombres.* — *Théorie des nombres.* — *Intervalles* (*musicaux?*); 2° six Livres sur l'*Astrologie;* 3° une série d'autres Livres adressés à Alexandre, à Arybas, à Héphestion (deux sur la Géométrie).

(3) Diog. Laërce (V, 89) en cite des écrits géométriques. Héraclide paraît avoir présidé l'Académie lors du troisième voyage de Platon en Sicile, en 361 (Suidas); il professa la rotation de la Terre autour de son axe et la circulation de Mercure et de Vénus autour du Soleil.

intermédiaires entre Eudoxe et Euclide, il semble qu'en faisant abstraction des perfectionnements de détail apportés aux *Éléments*, et du développement de la *Sphérique*, lié à celui que prenait alors l'Astronomie, on devra distinguer :

1° Les éléments de la théorie des coniques, tels qu'on peut, dans une certaine mesure, les reconstituer en éliminant, des quatre premiers Livres d'Apollonius, ce qui apparaît comme étant de l'invention de ce dernier; en effet, d'après ce que dit Pappus (VII, p. 676-677), il semble qu'Euclide ait composé ses propres *Coniques* comme il a fait pour les *Éléments*, sans y mettre beaucoup de nouveau, tandis que son contemporain Aristée, en écrivant cinq Livres *Sur les lieux solides*, avait, au contraire, déjà poussé la théorie plus loin et même abordé des questions laissées en dehors par Apollonius;

2° Les théories de la Géométrie plane (droites et cercles) correspondant aux Ouvrages perdus d'Euclide et d'Apollonius, qu'énumère Pappus comme précédant les *Coniques* dans la collection analytique des anciens; bon nombre de ces Livres touchaient en effet des problèmes assez simples pour avoir été abordés de très bonne heure, et, quand nous voyons, dans le résumé de Proclus, Hermotime, de Colophon, donné comme ayant écrit sur les *lieux*, nous pouvons bien croire qu'il élaborait la matière des deux Livres d'Apollonius sur les *Lieux plans*.

Il est possible au reste de donner à cette conjecture un fondement plus assuré; Eutocius nous a conservé de ce Traité, dans son *Commentaire sur les Coniques*, p. 11-12, une proposition relative au cercle comme lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné. Or, dans la *Météorologie* d'Aristote (III, Ch. V, § 6-11), nous trouvons déjà l'une des deux parties de cette proposition (¹), et, quoique la rédaction soit loin d'être la même, la marche de la construction et de la démonstration est identique. A la vérité, le passage d'Aristote en question

(¹) Que les points du cercle jouissent de la propriété en question; l'autre partie, que les points en dehors de la circonférence ne jouissent pas de cette propriété, ne se retrouve que dans Apollonius.

doit, à mon avis du moins, être regardé comme interpolé [1]; mais l'interpolation est sans doute très ancienne et bien antérieure à Apollonius. Si d'ailleurs le rapprochement n'a pas encore été fait, c'est que les commentateurs d'Aristote se sont tous trouvés assez peu compétents pour ne pas reconnaître le but de la démonstration; mais l'indication que je donne doit suffire à tout géomètre pour se retrouver dans un passage qui n'offre pas en réalité de difficulté sérieuse, et je crois inutile d'entrer dans des détails plus circonstanciés.

4. Un troisième ordre de questions que nous voyons apparaître dans le même siècle se rapporte à la technologie, et l'on verra peut-être dans la nature des discussions poursuivies un indice de l'influence de Platon, c'est-à-dire d'un penseur plus philosophe que géomètre. En tout cas, ce n'est pas son nom, mais c'est principalement celui de Ménechme qui se trouve lié à ces discussions, dont Proclus nous a conservé un écho d'après Geminus.

La première mention se rapporte au terme même d'*Éléments* (στοιχεῖα). Voici comment Proclus l'introduit :

Immédiatement après le résumé historique (p. 70), il se propose de définir le but des *éléments :* ce but, dit-il, peut être envisagé soit d'après l'objet même du Traité, soit relativement à l'étudiant. D'après l'objet, le but est la théorie des cinq polyèdres réguliers qui, comme on le sait, jouent un rôle capital dans la physique pythagorisante de Platon (*Timée*). Partant de là, quelques subtils philosophes avaient imaginé d'assigner, à chacun des treize Livres d'Euclide, un but spécial dans la théorie physique de l'univers. Proclus fait exceptionnellement ici preuve de bon sens en se contentant de cette indication, et passe à définir le but relatif à l'étudiant; il trouvera dans le Traité d'Euclide les éléments de la science géométrique, il y puisera les connaissances fondamentales

---

[1] Par suite de l'application du même critérium linguistique qui a permis à MM. Allman et Usener de distinguer le texte d'Eudème des interpolations de Simplicius dans le fragment sur la quadrature des lunules. J'ai étudié la question dans la *Revue de Philologie*, 1886.

sur lesquelles s'appuient tous les travaux postérieurs et ceux d'Archimède (¹) et ceux d'Apollonius.

Le terme d'*éléments* (στοιχεῖα) s'applique proprement à ces théorèmes qui, dans toute la Géométrie, sont primordiaux et principes de conséquences qui s'appliquent partout et fournissent les démonstrations de relations en grand nombre; on peut comparer leur rôle à celui des lettres (également nommées στοιχεῖα en grec) dans le langage.

On doit, des éléments proprement dits, distinguer les théorèmes élémentaires (στοιχειώδη) qui sont également généraux, simples et remarquables, mais n'ont pas la même valeur en tant que leur application dans la Science n'est pas universelle : telle est la proposition que les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés se coupent en un même point.

Après avoir développé les considérations que je viens d'analyser, Proclus emprunte à Geminus le passage suivant :

P. 72, 23-73, 14. « D'ailleurs, *élément* se dit en deux sens, comme le remarque Ménechme; car ce qui sert à obtenir est *élément* de l'obtenu; ainsi, dans Euclide, la première proposition l'est de la seconde (problèmes), la quatrième de la cinquième (théorèmes). Dans ce sens, beaucoup de propositions peuvent être réciproquement appelées *éléments* les unes des autres. Ainsi de l'égalité à quatre droits de la somme des angles extérieurs d'un polygone, on conclut le nombre d'angles droits que vaut la somme des angles intérieurs et inversement (²). Dans cette signification l'*élément* ressemble au *lemme*. Mais on appelle autrement *élément* ce qui est plus simple et en quoi se décompose le plus complexe; dans ce sens, on ne peut plus dire que tout est *élément* de tout, mais seulement ce qui est primordial par rapport à ce qui est régulièrement la conséquence : par exemple, les postulats seront éléments des théorèmes. C'est dans ce dernier sens qu'Euclide a

---

(¹) Proclus vise spécialement la citation des *Éléments* (XII, 2) dans le Traité *de la Sphère et du Cylindre*, I, 6.

(²) Ces théorèmes ne figurent pas dans les *Éléments* d'Euclide; l'exemple doit être de Ménechme. Ce passage prouve suffisamment, au reste, que le titre d'*Éléments* devait être usité avant Euclide, ce qu'on pourrait autrement mettre en question.

composé des *éléments*, les uns pour la Géométrie plane, les autres pour la Stéréométrie, et que de nombreux auteurs ont de même écrit des éléments d'Arithmétique ou d'Astronomie. »

5. Le second fragment où apparaît le nom de Ménechme se rapporte à une assez curieuse discussion sur la nature des propositions géométriques :

P. 77, 15-78, 13. « Déjà, parmi les anciens, les uns, comme Speusippe et Amphinome, proposaient de tout appeler théorème, pensant que ce terme convient mieux que celui de problème aux sciences théorétiques (contemplatives) et surtout traitant des choses éternelles; car, pour de telles choses, il n'y a pas de génération; il n'y a donc pas de place pour le problème où il s'agit d'engendrer et de faire quelque chose comme si elle n'était pas auparavant : par exemple, construire un triangle équilatéral, décrire un carré sur une droite donnée, placer une droite (donnée) à partir d'un point donné (*Élém.*, I, 2). Il vaut mieux, disaient-ils, regarder toutes ces choses comme existant déjà [1], et dire que nous considérons leurs générations non pas en fait, mais relativement à la connaissance, si nous supposons soumises au devenir des choses qui sont toujours; il convient donc de dire que nous les traitons toutes par des théorèmes, non par des problèmes. »

« D'autres, au contraire, comme les mathématiciens de l'école de Ménechme, étaient d'avis de tout regarder comme des problèmes, tout en en distinguant deux formes : tantôt en effet il s'agit de fournir (πορίσασθαι) quelque chose de cherché, tantôt au contraire, prenant quelque chose de déterminé, de voir ce que c'est, ou quelle en est la nature, ou ce qui lui arrive, ou quelle est sa relation à quelque autre chose [2]. »

Le troisième et dernier fragment n'appartient plus au prologue de Proclus, mais bien au commentaire sur les propositions (I, 6) :

P. 253, 16-254, 5. « Il faut remarquer à ce sujet que beaucoup

(1) P. 78,4, je lis ὅτι πάντα ταῦτά ἐστι au lieu de ὅτι πάντα ταὐτά ἐστι.

(2) La suite du passage, où Proclus justifie successivement les deux opinions, ne paraît pas empruntée à Geminus.

de réciproques sont fausses et ne sont donc pas de véritables réciproques ; ainsi tout nombre hexagone est triangle, mais il n'est pas vrai que tout nombre triangle soit hexagone. La raison en est qu'un des termes est plus général, l'autre plus particulier, et la proposition universelle n'est vraie qu'en établissant la relation dans un seul des deux sens. Pour qu'il y ait réciprocité, il faut que le premier terme soit identique au second. C'est ce que savaient déjà les mathématiciens de l'école de Ménechme et d'Amphinome. »

6. Il résulte de ces trois fragments que Ménechme avait dû traiter philosophiquement des principes et des méthodes de la Géométrie. A côté de lui et discutant les mêmes questions, nous voyons paraître le neveu de Platon Speusippe, ainsi qu'un autre personnage, Amphinome, dont le nom ne nous est pas connu d'ailleurs.

Proclus cite encore Speusippe au début de son commentaire sur les postulats et axiomes :

P. 179, 12-23. « Il faut, en tout cas, que les principes diffèrent de ce qui les suit en ce qu'ils soient simples, indémontrables, et se reconnaissent immédiatement comme vrais ; car, en général, dit Speusippe, l'intelligence, dans ses poursuites, sans parcourir des stades successifs, met en avant et, pour les recherches subséquentes, dispose des propositions dont elle a une connaissance plus claire que n'en a l'œil des objets visibles, ou bien au contraire, ne pouvant saisir immédiatement la vérité, elle essaye d'y parvenir successivement et par degrés, en partant des premières propositions. »

Amphinome est cité deux autres fois, et pour des questions plus intéressantes :

P. 202, 9-25 (Commentaire sur I, 1). « Beaucoup d'auteurs pensent que la Géométrie ne considère ni la cause, ni le pourquoi ; ainsi c'est l'opinion d'Amphinome qui l'emprunta d'ailleurs à Aristote [1]. Mais on peut, dit Geminus, rencontrer en Géométrie des recherches sur ces questions. Comment ne serait-ce pas en effet au

---

[1] Ce passage est insuffisant pour établir qu'Amphinome n'ait pas été contemporain d'Aristote.

géomètre à chercher par quelle cause il est possible d'inscrire dans le cercle une infinité de polygones équilatéraux, tandis que dans la sphère il n'est plus possible d'inscrire une infinité de polyèdres équilatéraux, équiangles et formés par des faces polygonales pareilles entre elles? Qui peut chercher et trouver cela, sinon le géomètre? D'autre part, les géomètres peuvent raisonner par réduction à l'absurde : alors ils se contentent de trouver ce qui a lieu; ils peuvent au contraire procéder par démonstration régulière (προηγουμένη), et, dans ce cas, si cette démonstration se fait sur des hypothèses particulières, la cause n'apparaît point encore; mais, si le raisonnement est général et fait pour tous les cas semblables, aussitôt le pourquoi devient évident. ».

P. 220, 7-221, 6. (Commentaire sur I, 1). « Nous considérerons qu'en général les problèmes peuvent recevoir des solutions uniques, multiples ou en nombre indéfini. »

« Les premiers sont appelés réguliers (τεταγμένα) par Amphinome, ceux dont les solutions sont multiples, mais en nombre déterminé, sont dits *intermédiaires* (μέσα), ceux enfin qui offrent une variété indéfinie de solutions sont nommés *irréguliers* (ἄτακτα). Comment un problème peut être unique ou multiple, on le voit immédiatement pour les triangles précités; car l'équilatéral se construit d'une seule façon, l'isoscèle de deux, le scalène de trois [1]. Quant à un problème indéfini, en voici un : *Diviser une droite donnée en trois segments en progression.* Si l'on divise en effet cette droite suivant le rapport double (c'est-à-dire si l'on divise la droite c en deux segments a, b, tels que $b = 2a$) et qu'on fasse la parabole du carré du plus petit segment par rapport au plus grand en ellipse d'un carré (si l'on résout $a^2 = bx - x^2$, d'où $x = a$), la division se fera en trois parties égales. Mais, si le rapport du plus grand segment au plus petit est supérieur au double (autrement le problème serait impossible), comme triple, etc.,

---

(1) Ceci se rapporte aux constructions faites par analogie à celle de l'équilatéral donnée par Euclide I, 1, constructions que nous étudierons plus tard. La base de l'isoscèle qui est donnée peut être plus petite ou plus grande que les côtés égaux dont la longueur est d'ailleurs arbitraire. La base donnée du scalène peut être plus petite, plus grande ou intermédiaire entre les deux autres côtés supposés d'ailleurs arbitraires. Pour nous, ces problèmes seraient indéterminés.

et qu'on fasse la parabole du carré du plus petit segment par rapport au plus grand en ellipse d'un carré, on aura la division en trois parties inégales. [Soit $b = ma$, ces parties seront $\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} a, a, \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} a$]. Puis donc que l'on peut faire la division en deux d'une infinité de façons, de telle sorte que le plus grand segment soit supérieur au double du plus petit, triple, etc., car le rapport de multiplicité progresse indéfiniment, la division en trois parties en progression se fera d'une infinité de façons. »

7. De ces diverses citations deux points surtout paraissent à retenir.

La distinction d'une troisième forme de proposition, le porisme, à côté du théorème et du problème, est étrangère aux géomètres du IVe siècle avant J.-C., et elle n'a probablement résulté plus tard que du choix fait par Euclide de cette expression pour désigner un de ses Ouvrages. Toutefois, le germe de cette distinction apparaît déjà dans le second fragment de Ménechme.

La classification des problèmes d'après le nombre des solutions n'est nullement conçue d'après nos habitudes modernes. Ainsi le problème I, 1, d'Euclide, *construire un triangle équilatéral sur une base donnée,* a pour nous deux solutions symétriques par rapport à cette base; pour les anciens, la solution est unique (μοναχῶς), elle est donnée par l'intersection de deux cercles et ils ne s'inquiètent pas du nombre de points donnés par cette intersection.

Si, sur la base donnée, il s'agit de construire un triangle isoscèle, cette base n'étant pas un des deux côtés égaux, le sommet est pris arbitrairement sur une droite déterminée, soit au-dessus, soit au-dessous du point qui donnerait le triangle équilatéral : de là deux figures, dont chacune compte pour une solution unique.

De même, la construction d'un triangle scalène sur une base donnée, si indéterminée qu'elle soit, ne comptera que trois cas distincts.

L'exemple du problème indéterminé (ἀπειραχῶς) nous présente au contraire un problème qui devient parfaitement déterminé, une

fois que l'on s'est donné une certaine relation entre deux inconnues ; mais il offre ceci de remarquable que la solution est conçue comme indépendante de cette relation arbitraire. C'est donc sous cette forme que les anciens concevaient la généralisation des problèmes particuliers, et cette forme doit être regardée comme analogue aux solutions ἐν ἀορίστῳ de Diophante, alors qu'il arrive à la valeur de l'inconnue en fonction d'une variable arbitraire. Il est certain que cette façon d'envisager les problèmes est remarquable par sa profondeur, si elle laisse à désirer sous le rapport de la netteté et de la précision.

CHAPITRE XI.

La technologie des éléments d'Euclide.

1. Après avoir défini le sens des termes *éléments* et *élémentaire*, Proclus intercale dans son Prologue un éloge de l'œuvre d'Euclide. Ce morceau me paraît également emprunté à Geminus ; je remarque notamment que l'on y parle de divers Traités élémentaires faisant concurrence à celui d'Euclide, tandis qu'au temps de Proclus tous ces Traités, dont nous n'avons aucune trace, avaient, sans aucun doute, déjà disparu. Au reste, voici la traduction de ce fragment.

Proclus (p. 73,15-75,3).

« Il est difficile, dans chaque Science, de choisir et de disposer dans l'ordre convenable les éléments, d'où procède et où se ramène tout le reste. De ceux qui s'y sont essayés, les uns ont grossi leur Recueil, les autres l'ont diminué ; les uns ont employé des démonstrations abrégées, les autres ont indéfiniment allongé leur exposition ; les uns ont évité la réduction à l'impossible, ceux-ci les *proportions* (¹), ceux-là ont imaginé des développements préliminaires contre ceux qui rejettent les principes; en un mot, les divers auteurs d'*Éléments* ont inventé nombre de systèmes différents.

» Dans un pareil Traité, il faut éviter tout superflu, — c'est un embarras pour l'étudiant ; — réunir tout ce qui se tient ensemble et embrasse le sujet, chose essentielle pour la Science ; — viser principalement et en même temps à la clarté et à la concision, car leurs contraires troublent l'intelligence ; — chercher à donner aux théorèmes la forme la plus générale, — car le détail de l'enseignement en cas particuliers ne fait que rendre la connaissance plus difficile à acquérir.

(¹) Le sens est douteux ; j'ai admis qu'ἀναλογία était employé avec sa signification technique.

» A tous ces points de vue, on trouvera que le Traité élémentaire d'Euclide l'emporte sur tout autre; si l'on en considère l'utilité, il aboutit à la théorie des figures primordiales (¹); la clarté et l'enchaînement régulier sont assurés par la marche du plus simple au plus composé et par le fondement de la théorie sur les notions communes (²), la généralité des démonstrations par le choix du point de départ pour les questions à traiter, dans les théorèmes qui donnent les premiers principes. Quant à ce qu'il semble avoir omis, ou bien il s'agit de choses faciles à connaître par les mêmes moyens, comme la construction du triangle scalène ou isoscèle (³), ou bien de choses étrangères à un recueil d'Éléments, parce qu'elles y introduiraient une complication infinie; telles sont les *irrationnelles non classées* qu'Apollonius a longuement étudiées (⁴). Ou bien encore il s'agit de conséquences des causes exposées : ainsi les diverses espèces des angles (⁵) et des lignes; pour toutes ces questions qu'Euclide a laissées de côté et que d'autres ont traitées avec ampleur, la connaissance dérive des simples éléments. »

2. Après ce morceau, Proclus consacre la fin de son Prologue (⁶) à marquer comment la Géométrie a d'abord à exposer des principes, sans avoir à en rendre raison, pas plus que toute autre Science particulière, puis à développer les conséquences avec les démonstrations convenables.

(¹) ἀρχικῶν σχημάτων; Proclus entend par là très probablement les figures des polyèdres réguliers, attribuées par Platon aux particules des éléments ou principes reconnus par les anciens.

(²) Pour axiomes, qui est le terme préféré par Proclus.

(³) Allusion au Commentaire sur la construction du triangle équilatéral, I, 1 d'Euclide.

(⁴) Sur cette suite au Xᵉ Livre d'Euclide, il reste quelques indications dans un manuscrit arabe analysé par Woepcke (*Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*, XIV, p. 658-720). Ce manuscrit contient la traduction de Commentaires écrits sur le Livre X par Vettius Valens, suivant la conjecture de Woepcke; par Pappus, suivant celle, plus probable, de Heiberg.

(⁵) Les anciens considéraient les angles formés par des lignes courbes; en réalité, c'est donc au fond de la théorie des tangentes qu'il s'agit ici, en même temps que de celle des courbes.

(⁶) Je fais abstraction des dernières pages, où il définit le but du Livre I et en indique les grandes divisions.

Il distingue les principes en trois sortes d'après la nomenclature et les définitions d'Aristote (*Analyt. post.*, I, 50), et sur ce point s'écarte évidemment de Geminus.

Il a d'ailleurs soin de marquer que les stoïciens appellent en général *hypothèses* les principes de la Science, et qu'ils donnent simplement au mot *axiome* le sens général d'affirmation.

Mais en reprenant la tradition d'Aristote, Proclus ne la comprend plus guère. Ainsi, pour retrouver dans Euclide les distinctions du Stagirite en *hypothèses, axiomes* et *postulats,* il commence par confondre les définitions avec les hypothèses, quoique Aristote ait bien soin de faire une différence (¹). En adoptant la distinction péripatéticienne entre l'axiome et le postulat suivant le degré d'évidence, Proclus ne s'écarte pas moins de la terminologie d'Euclide. On voit assez combien son guide ordinaire lui fait défaut.

Heureusement, il le retrouve en arrivant à la distinction de la double forme des propositions en théorèmes et en problèmes. J'ai déjà rapporté la discussion entre Speusippe et Ménechme qui ne reconnaissaient : le premier que des théorèmes, le second que des problèmes.

Il convient de remarquer qu'une des raisons de cette discussion était que les géomètres n'avaient plus (²) de terme général pour désigner la proposition, soit théorème, soit problème. Le mot πρότασις, auquel correspond celui de *proposition,* signifiait exclusivement l'énoncé, et c'est par abus qu'il s'est étendu plus loin. Au reste, dans les manuscrits géométriques grecs les plus anciens, les propositions sont simplement numérotées, et les inscriptions de πρότασις, θεώρημα ou πρόβλημα, quand elles existent, sont ré-

---

(¹) Ce que dit Aristote de l'hypothèse doit s'entendre principalement des postulats propres aux applications de la Géométrie, accessoirement des hypothèses faites pour les démonstrations de la Géométrie pure, au même sens où nous l'entendons actuellement. Cette double signification a subsisté pendant toute l'antiquité, comme elle subsiste encore actuellement.

(²) Les pythagoriciens avaient employé le mot σχῆμα, dont le sens s'était dès lors restreint à celui de figure. C'est notamment ce mot qui se trouve dans le dicton de l'école, rapporté par Proclus (84, 17-17) : σχᾶμα καὶ βᾶμα, ἀλλ' οὐ σχᾶμα καὶ τριώβολον, et qui signifierait, d'après lui : « Un théorème et un pas en avant (un progrès dans la Science), non pas un théorème et le triobole (l'argent nécessaire à la vie journalière). »

centes et n'appartiennent certainement pas au texte primitif (¹).

Comme Euclide n'a d'ailleurs pas l'habitude de renvoyer à une proposition précédente, comme, au contraire, pour s'appuyer sur ce qui est déjà connu, il en répète l'énoncé, on dirait qu'il ignore les mots de θεώρημα et de πρόβλημα, ou qu'il n'a pas voulu trancher une dispute de mots qui peut-être durait encore. Mais, comme l'indique Proclus, il marquait expressément la différence des deux sortes de propositions par la différence des formules finales, ὅπερ ἔδει δεῖξαι (ce qu'il fallait démontrer), ou ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (ce qu'il fallait faire).

3. Geminus (Proclus, p. 79, 2-81, 4) reconnaît d'ailleurs le théorème comme plus général, en ce sens que la démonstration lui appartient en propre, et comme pouvant être indépendant de tout problème.

On distinguait le théorème et le problème en disant que, dans le second, l'attribut (τὸ κατηγορούμενον) donné à la matière n'était pas seul possible, mais encore son contraire: que, dans le premier, il se trouvait seul possible; c'était la manière de reconnaître un théorème déguisé sous forme de problème, ou un problème énoncé comme théorème.

Ainsi, proposer d'inscrire dans un demi-cercle un angle droit n'est pas parler en géomètre, puisque tous les angles inscrits dans un demi-cercle sont droits; au contraire, inscrire dans un cercle un triangle équilatéral est bien un problème, puisqu'on y peut inscrire un triangle qui ne soit pas équilatéral, etc.

D'après Zénodote, qui appartenait à la succession d'Œnopide et aux disciples d'Andron, le théorème cherche quelle est la propriété (σύμπτωμα) qui s'énonce de la manière en question, le problème cherche à quelle chose appartient telle propriété.

D'où, d'après Posidonius, on a défini le problème une proposition (²) où l'on cherche oui ou non, le théorème une proposition

(¹) Celles d'ὅροι (définitions), αἰτήματα (postulats), κοιναὶ ἔννοιαι (notions communes, axiomes) peuvent également laisser prise à quelques doutes. Mais Euclide n'aurait certainement renié aucune des deux premières; la troisième, au contraire (voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VIII, mai 1884), est une formule de l'époque où dominent les stoïciens.

(²) Le terme de πρότασις reçoit déjà son extension abusive. Le texte intervertit les deux définitions; il faut supprimer πρόβλημα introduit à tort, p. 80, l. 22.

où l'on cherche ce qu'est ou comment est ceci ; la proposition théorétique n'en doit pas moins se formuler en affirmation, la problématique comme en cherchant ; ex : *S'il est possible de construire un triangle sur telle droite;* car il y a différence entre chercher simplement et sans détermination s'il y a une perpendiculaire à partir de tel point sur telle droite, ou contempler ce qu'est la perpendiculaire.

L'origine que j'attribue à ce passage de Proclus n'est pas seulement indiquée par les citations qu'il renferme : elle est confirmée par le rapprochement avec le fragment de Carpos inséré dans le Commentaire sur I, 4, fragment où l'opinion de Geminus était contredite.

Fragment de Carpos d'Antioche

(*Proclus,* p. 241,19-243,11).

« Carpos le mécanicien, dans son *Traité astrologique,* a soulevé la question des problèmes et théorèmes; je n'examinerai pas maintenant s'il le faisait ou non à propos : en tout cas, abordant leur distinction, il dit que le genre des problèmes précède dans l'ordre celui des théorèmes, car c'est par les premiers que l'on trouve les sujets auxquels se rapportent les propriétés à étudier. L'énoncé du problème est simple et n'a pas besoin d'une intelligence exercée; il y est clairement demandé de faire telle ou telle chose : construire un triangle équilatéral (*Eucl.,* I, 1) ou bien, étant données deux droites, retrancher de la plus grande une égale à la moindre (I, 3); là, rien d'obscur, aucun besoin d'une attention minutieuse. L'énoncé du théorème est au contraire pénible, il réclame une grande exactitude et une critique savante, pour n'être ni trop étendu, ni insuffisant par rapport à la vérité, et on peut le voir même sur ce premier de tous les théorèmes [1].

» D'autre part, pour les problèmes, il y a un procédé général, celui de l'analyse, grâce auquel on peut obtenir la solution et aborder les questions les plus obscures; pour les théorèmes, au contraire, il est difficile de reconnaître la façon de s'y prendre, et jusqu'à nous, dit-il, personne n'a pu donner une méthode générale

---

[1] *Eucl.,* I, 4 : Égalité de deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

pour leur invention ; ainsi, comme facilité, le genre des problèmes est plus simple. Après ces distinctions, il ajoute :

» C'est la raison pour laquelle, dans les *Éléments*, les problèmes précèdent les théorèmes ; c'est par eux que débutent les *Éléments*, et le premier théorème n'est placé qu'au quatrième rang ; ce n'est pas parce que les problèmes servent à la démonstration du suivant, mais parce que, même quand il n'y a besoin d'aucune proposition précédente, le théorème doit céder le pas aux problèmes, parce qu'ils sont problèmes. En fait, pour ce premier théorème, il se sert exclusivement des notions communes, et prend en quelque sorte le même triangle dans différentes situations ; la coïncidence et l'égalité complète qu'elle sert à démontrer dépendent donc d'une conception sensible et immédiatement claire. Cependant le premier théorème, même avec une pareille démonstration, est justement relégué après les problèmes. Ainsi on peut dire qu'en général ceux-ci ont le premier rang. »

En essayant de réfuter l'opinion de Carpos et de montrer qu'il n'a pas compris la véritable raison de l'ordre d'Euclide, Proclus ajoute : « Il est donc frivole d'attaquer Geminus comme ayant dit que le théorème est plus parfait que le problème ; car si c'est d'après l'ordre que Carpos donne la prééminence aux problèmes, c'est d'après le degré de perfection que Geminus l'accorde aux théorèmes [1]. »

4. Il me semble enfin que c'est également à Geminus que Proclus a emprunté la technologie des diverses parties de la proposition, technologie qu'il a insérée dans le Commentaire sur I, 1. A la vérité, il devait sans doute la trouver, par exemple dans le Commentaire de Porphyre-Pappus, mais Geminus ne l'avait certainement pas omise, et d'ailleurs, dans Proclus, elle suit une allusion à la distinction des trois lignes *homéomères* [2] (p. 201,21-202,1),

---

[1] Il est difficile de reconnaître si ce passage est suffisant pour considérer Carpos comme postérieur à Geminus, et comme l'ayant pris à partie ; peut-être Proclus visait-il un Commentaire comme celui de Pappus, où l'opinion de Carpos aurait été rapportée et opposée à celle de Geminus. Mais cette conjecture me paraît moins probable.

[2] La droite, la circonférence et l'hélice. *Voir* Proclus, p. 112.

théorie favorite du stoïcien, et une citation expresse de ce dernier [1].

En tout cas, cette technologie doit remonter au temps d'Euclide lui-même; car il en suit les divisions avec une telle régularité qu'on doit supposer que c'était dès lors une tradition consacrée par un long usage; les termes employés plus tard pour désigner les diverses parties de la proposition devaient donc être déjà adoptés.

La connaissance de cette technologie est indispensable pour l'étude de la Géométrie grecque, car c'est d'après la fidélité avec laquelle les règles en sont observées que l'on distingue immédiatement ce qui est classique et ce qui ne l'est pas.

Les anciens distinguaient dans un problème ou théorème en général six parties : la protase, l'ecthèse, la condition (διορισμός), la construction, la démonstration et la conclusion. De ces six parties, la première et les deux dernières sont seules essentielles, les trois autres peuvent manquer accidentellement.

La *protase* est l'énoncé; ex., I, 1 : *Sur une droite limitée donnée construire un triangle équilatéral.* Cet énoncé est toujours conçu en termes généraux et sans aucune référence à une figure déjà tracée.

Mais toujours les théorèmes, et aussi le plus souvent les problèmes, ont un énoncé qui contient des données; les géomètres répétaient donc l'énoncé en déterminant d'abord les données sur la figure et en marquant ensuite ce qu'il fallait démontrer ou trouver. Ex., I, 1 : *Soit* AB *la droite donnée limitée. — Il faut, sur cette droite* AB, *construire un triangle équilatéral.*

Cette répétition de l'énoncé n'est omise que quand il n'y a pas de données à déterminer, par exemple pour les problèmes : *Construire un triangle isoscèle dont les angles à la base soient doubles de l'angle au sommet* (IV, 10). — *Trouver deux droites commensurables en puissance seulement et dont le rectangle soit un moyen* [= une racine quatrième] (X, 29). Dans ce cas-là, il n'y a, en effet, qu'à passer à la construction.

Or, Proclus distingue dans cette répétition deux parties : la première, qui expose quelles sont les données et qu'il appelle

---

[1] *Voir* le premier fragment d'Amphinome, que j'ai déjà rapporté (p. 138).

ecthèse; la seconde, celle qui énonce ce qu'il s'agit de démontrer ou de faire, et qu'il appelle διορισμός.

La distinction de ces deux parties est bien marquée dans l'exemple donné; Euclide commence d'ailleurs régulièrement la seconde par δεῖ δὴ (il faut, à savoir ...) pour les problèmes; par λέγω ὅτι (je dis que ...) pour les théorèmes.

Mais Proclus, ou plutôt son guide, paraît ici avoir abusivement employé, pour désigner la conclusion de l'ecthèse, un terme qui devait s'appliquer à toute autre chose. Au moins, dans le langage de Pappus, le διορισμός est exclusivement l'énoncé de la condition nécessaire pour qu'un problème soit possible. Ce διορισμός, dont on regardait le platonicien Léon comme l'inventeur, devait, dans tous les cas où il y avait lieu de le considérer, suivre immédiatement la *protase*. Ex., I; 22 : (Protase) *Avec trois droites, respectivement égales à trois droites données, former un triangle.* — (Condition ou διορισμός) *Il faut que la somme de deux quelconques de ces droites données soit supérieure à la troisième.* Naturellement, dans l'*ecthèse* qui suit, on marque que la condition est satisfaite par les données ([1]).

Après la répétition de l'énoncé, vient régulièrement la construction (κατασκεύη) qui achève l'explication de la figure, commencée dans l'*ecthèse,* et indique le tracé des diverses lignes nécessaires pour la solution du problème ou la démonstration du théorème. Cette partie peut manquer, lorsque la figure est déjà complètement décrite dans l'*ecthèse.*

La construction peut offrir différents cas, lorsque les déterminations des données par l'ecthèse sont susceptibles de certaines variations. Tantôt les géomètres anciens traitaient explicitement ces cas, lorsqu'ils donnent lieu à des démonstrations différentes; tantôt ils se contentaient de tracer les différentes figures auxquelles s'appliquaient la même construction et la même démonstration.

Sur la démonstration proprement dite, Proclus fait une distinction entre le cas où elle est faite d'après la cause même (nous disons quand nous apercevons la véritable raison de la chose) et le cas où elle s'appuie sur ce qu'il appelle τεκμήρια, c'est-à-dire des

---

([1]) L'énoncé du διορισμός commence par δεῖ δὴ de même que la conclusion de l'ecthèse dans les problèmes; cette ressemblance grammaticale a pu être l'origine de la dénomination abusive adoptée par Geminus.

preuves plus ou moins indirectes ([1]). Il cite comme exemple du second la démonstration de l'égalité à deux droits de la somme des angles d'un triangle, où l'on a recours à la considération d'un angle extérieur.

La conclusion (συμπέρασμα) consistait, après l'achèvement complet de la démonstration, à répéter l'énoncé en y ajoutant *donc* (ἄρα). Pour les théorèmes, la répétition porte sur la *protase* qui reparaît intégralement, si longue qu'elle soit, après quoi vient la formule consacrée : *ce qu'il fallait démontrer.* Pour les problèmes, c'est l'*ecthèse* qui est retournée. *Ex. :* pour I, 1, après la fin de la démonstration, « donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles », vient la conclusion :

« Donc le triangle ABC est équilatéral et il est construit sur la droite limitée donnée AB; ce qu'il fallait faire. »

A tout le moins, c'est là l'usage d'Euclide; Proclus indique que l'habitude s'était introduite de faire en outre une seconde répétition sur la *protase.*

Il est à peine utile de remarquer combien ces répétitions successives de la conclusion, de l'ecthèse et de la protase alourdissent la forme euclidienne. La dernière est particulièrement fastidieuse, et elle a déjà disparu dans Archimède et Apollonius; elle ne se trouve même pas dans les textes d'Autolycus et d'Aristarque de Samos, qui, à la vérité, ont pu être refondus lors de la rédaction de la collection du *Petit astronome.* Mais, à part cette simplification, la forme euclidienne est restée absolument classique pendant toute l'antiquité.

5. Proclus définit ensuite divers termes techniques dont l'usage doit, en général, être considéré comme relativement récent, ou dont, au moins, nous ne sommes pas suffisamment autorisés à regarder les définitions comme empruntées à Geminus.

Il y a déjà, à la vérité, des *lemmes* dans les derniers Livres d'Euclide; mais l'inscription du mot dans les manuscrits ne nous est pas une garantie suffisante que l'auteur des *Éléments* les ait distingués comme tels; l'existence des lemmes est d'ailleurs, par

---

([1]) Cette distinction correspond à une formule aristotélique, mais détournée de son vrai sens, car elle s'applique proprement à la rhétorique. Rien n'empêche d'attribuer à Geminus ce que dit ici Proclus; cf. p. 69,11 et 365,1.

elle-même, une infraction à la règle d'après laquelle toute proposition invoquée doit avoir été préalablement démontrée.

Dans le cours d'une démonstration, on a besoin d'une relation dont la vérité n'apparaît pas comme douteuse, mais dont la preuve romprait le fil que l'on suit; on aurait dû l'établir auparavant, on la rejette plus loin « ὡς ἑξῆς δειχθήσεται » (comme il sera démontré ensuite). Voilà, dans une imperfection de la méthode suivie, l'origine du lemme; comme forme, et en raison de sa destination particulière, il apparaîtra donc le plus souvent comme un théorème sans protase et sans conclusion ([1]).

Plus tard, surtout sous la période gréco-romaine, c'est-à-dire après Geminus, alors que l'essor de la Géométrie fut arrêté et que l'on se mit, au lieu de pousser en avant, à étudier et à éplucher les écrits des grands mathématiciens de l'âge précédent, on s'occupa tout d'abord de rechercher les propositions invoquées expressément ou tacitement admises dans les démonstrations. Cette recherche était, d'ailleurs, d'autant plus utile qu'ils n'avaient pas eu l'habitude des renvois.

Naturellement, on trouva nombre de propositions de la sorte qui restaient à démontrer, soit que les auteurs les eussent négligées comme trop faciles, soit qu'on ne retrouvât pas les écrits du temps où elles avaient été démontrées. On se mit donc à compléter les démonstrations anciennes et ces compléments, qui furent appelés *lemmes* ([2]), servirent de point de départ aux Commentaires postérieurs, comme ceux d'Eutocius. On sait aussi que Pappus a fait un Recueil des lemmes composés sur les traités d'Analyse et que ce précieux Recueil forme le VIIe Livre de sa *Collection mathématique*. Enfin, un certain nombre de pareils lemmes, la plupart inédits, subsistent encore au milieu des scolies marginaux sur les traités du *Petit Astronome*, ainsi que Hultsch l'a fait remarquer ([3]).

([1]) La question des *lemmes* dans Euclide ne peut, au reste, être traitée à fond avant l'achèvement de l'édition critique entreprise par Heiberg.

([2]) Dans le fragment relatif à Ménechme (p. 73, 4) Geminus paraît entendre λῆμμα dans le sens général de proposition employée pour une démonstration, pour un synonyme de λαμβανόμενον, tandis qu'ici Proclus spécifie que ce mot ne doit se dire que des propositions non démontrées d'avance.

([3]) Un certain nombre des *lemmes* qui figurent dans le texte actuel d'Euclide ne doit pas avoir une origine plus ancienne. Ce qu'ajoute Proclus sur cette question des *lemmes* (p. 211,12-212,4) semble bien montrer, d'une part, qu'il ne suit

Après les lemmes, Proclus cite encore le *cas* (πτῶσις), le *porisme*, l'*objection* (ἔνστασις) et la *réduction* (ἀπαγωγή).

La subdivision d'un théorème ou problème en plusieurs *cas* est étrangère à la forme vraiment classique; les anciens géomètres préféraient multiplier les énoncés quand il le fallait, mais il leur arrivait de faire des omissions; les auteurs de lemmes ont donc eu aussi à ajouter des cas qui, parfois, sont passés dans les textes eux-mêmes.

L'*objection* est une forme particulière de lemme et correspond également à une imperfection de la démonstration. En général, l'*objection*, qui donne son nom à la réfutation qui en est faite, tend à faire regarder la démonstration comme ne s'appliquant pas dans tous les cas; il s'agit de prouver contre elle que tel cas supposé ne peut avoir lieu, ou que néanmoins la démonstration reste valable.

L'ἀπαγωγή, par laquelle on ramène une question à une autre qui ne sera traitée qu'ensuite, est plutôt une imperfection de la Science; en tout cas, quoique bien connue avant Euclide, ainsi que le montre l'histoire du problème de la duplication du cube, elle est aussi étrangère à la Géométrie classique que les deux formes précédentes.

Il en est autrement du porisme. « On appelle ainsi, dit Proclus (p. 212, 12-17), certains problèmes tels que les *Porismes* écrits par Euclide. On emploie également ce terme dans un sens particulier lorsque, de ce qui a été démontré, résulte un théorème qui n'a pas été proposé et qui apparaît donc comme un surcroît de bénéfice de la démonstration scientifique. »

Au sujet du premier porisme [1], sur I, 15, Proclus revient, en d'autres termes, sur la même distinction; la seconde signification, qui correspond à celle de corollaire, ne souffre aucune difficulté, mais l'emploi du mot *porisme* dans ce sens par Euclide n'est pas plus assuré que celui du mot *lemme*.

Il y a, dans le texte des *Éléments*, nombre de corollaires accolés à la conclusion de diverses propositions et débutant par la formule :

---

plus Geminus, de l'autre, que, de son temps, la grande affaire des géomètres était l'invention (démonstration) de ces propositions auxiliaires. On l'avait même réduite en méthode, en y appliquant l'analyse, la division des cas et la réduction à l'impossible. Proclus cite en revanche un de ses contemporains, Kratistos, comme n'employant que sa perspicacité naturelle.

[1] Ce porisme paraît d'ailleurs ne pas appartenir à Euclide.

ἐκ δὴ τούτου φανερόν (il est clair par là); mais il faut ajouter que l'authenticité d'une bonne partie de ces corollaires est au moins douteuse, et que, pour la plupart des autres, loin de chercher à les distinguer de la conclusion, Euclide les intercale avant la formule de clôture « ce qu'il fallait démontrer (faire) ». En somme, chez lui, le porisme-corollaire apparaît plutôt comme une modification de la conclusion régulière que comme une proposition détachée (1).

Quant au porisme-proposition, c'est un sujet qui appartient à la Géométrie supérieure, et que j'aurai l'occasion de traiter ultérieurement. Il me suffira donc, pour le moment, de rappeler ce que j'ai dit, à propos de la discussion entre Ménechme et Speusippe, de la nouveauté du mot au temps d'Euclide et de mentionner la signification que lui donne Proclus.

Il s'agit dans le porisme, non pas de démontrer, comme dans le théorème; non pas de construire, comme dans le problème, mais de trouver. Proclus donne comme exemple : « Trouver le centre d'un cercle donné », ou « Trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs commensurables données ». Logiquement, dès lors, le porisme, ainsi que l'a remarqué Heiberg, devait donc être un problème où εὑρεῖν figurait dans l'énoncé et dont ὅπερ ἐστὶν εὑρεῖν (ce qu'il fallait trouver) terminait la conclusion. S'il est vrai de dire que les problèmes de ce genre se transforment plus facilement en théorèmes, il faut néanmoins avouer que la distinction est passablement subtile, qu'elle est probablement postérieure à Euclide, et qu'elle ne détermine nullement la nature spéciale des propositions qu'il avait réunies dans ses trois Livres de *Porismes* (2).

Quoi qu'il en soit, ce que dit Proclus des porismes peut bien, exceptionnellement, remonter à Geminus, car il avait dû s'expliquer sur ce terme; et, d'autre part, Pappus, dans son Commentaire, devait sans doute s'exprimer comme dans sa *Collection mathématique*, c'est-à-dire en des termes tout différents.

---

(1) Jamais, en tout cas, le corollaire classique ne doit être suivi d'une démonstration, si brève qu'elle soit.

(2) Ce serait donc une explication après coup d'un titre peut-être choisi parce que le sens en était plus ou moins vague; celui d'*Éléments* ne l'est guère moins en fait.

CHAPITRE XII.

Les continuateurs d'Euclide.

1. Les *Éléments* d'Euclide, et surtout le premier Livre, n'avaient, à vrai dire, nul besoin d'être commentés, si par commentaire on entend l'explication des endroits obscurs; le travail que Proclus a consacré à ce Livre n'offre donc quelque intérêt, en dehors des minces renseignements historiques qu'il renferme, que parce qu'il permet, jusqu'à un certain point, d'apprécier les tentatives faites dans l'antiquité pour améliorer les *Éléments,* soit par d'autres tours apportés aux démonstrations, soit par l'adjonction de nouvelles propositions plus ou moins intéressantes.

Mais, avant d'aborder l'analyse du commentaire proprement dit de Proclus, avant de chercher à préciser le caractère, la date et les auteurs des tentatives en question, il ne sera pas inutile de considérer celles qui ont été faites, non pas pour simplifier ou pour grossir les *Éléments,* mais pour les continuer, notamment en développant davantage la théorie des polyèdres réguliers, qui fait l'objet du Livre XIII.

Euclide se borne, en fait, dans ce Livre, à construire les cinq polyèdres réguliers, inscriptibles dans une sphère donnée, et à comparer, entre eux et au diamètre de la sphère, les côtés de ces cinq polyèdres.

Déjà un géomètre qui fut probablement son contemporain ([1]), qui, en tout cas, doit avoir vécu à Alexandrie, Aristée, écrivait un Livre intitulé : *Comparaison des cinq figures,* dans lequel il énonçait ce théorème : que, pour le dodécaèdre et l'icosaèdre inscrits

---

([1]) Si du moins il s'agit de celui que Pappus appelle l'*ancien* (ὁ πρεσβύτερος) et qui écrivit cinq Livres sur les *Lieux solides :* mais, comme Hypsiclès ne désigne pas davantage celui dont il parle, ce peut être l'Aristée plus jeune (ὁ νεώτερος), dont on n'a pas d'autres traces. Il est assez curieux que, vers la même époque, il y a eu aussi à Alexandrie deux mathématiciens d'un nom très voisin, connus d'ailleurs seulement comme astronomes : Ἀρίστυλλος μέγας, Ἀρίστυλλος μικρός (Aristylle le grand et le petit). *Uranologion* de Petau, p. 267 (Catalogue des commentateurs d'Aratus).

dans une même sphère, la sphère inscrite est aussi la même, que par suite le rapport des volumes des deux polyèdres est égal à celui de leur surface. Il n'est pas à douter qu'il ne démontrât de même le théorème analogue pour le cube et l'octaèdre inscrits dans la même sphère et qu'en général il ne fît, pour les volumes et les surfaces, la comparaison qu'Euclide s'était borné à donner pour les côtés.

Les démonstrations d'Aristée pour les deux solides les plus complexes étaient probablement assez pénibles, puisque Apollonius de Perge crut devoir reprendre le même sujet en écrivant une *Comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère;* et lui-même ne fut pas bien satisfait de son premier travail, puisqu'il en donna une seconde édition améliorée.

Enfin cette même question spéciale est l'objet du Livre d'Hypsiclès d'Alexandrie, qui compte comme XIVe dans la vulgate des *Éléments;* c'est dans la dédicace de ce Livre (1), adressée à un certain Protarque, géomètre et ami du père d'Hypsiclès, que celui-ci, évidemment encore assez jeune, nous fournit les indications qui précèdent. Il ajoute que son père (déjà mort quand il écrit) avait, en commun avec un Basilide de Tyr, travaillé sur la première édition du Traité d'Apollonius pour l'améliorer; il reconnaît que la seconde édition ne laisse pas prise à la critique comme la première; il présente toutefois sa méthode comme nouvelle en ce qu'il part de cette proposition que, pour le dodécaèdre et l'icosaèdre inscrits dans la même sphère, les faces sont inscriptibles dans un même cercle. Enfin il donne, comme expression du rapport des volumes ou des surfaces du dodécaèdre et de l'icosaèdre, le rapport des côtés du cube et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère.

2. Il est assez clair, d'après ce qui précède, qu'Hypsiclès devait appartenir à la génération qui suivait immédiatement celle d'Apollonius, et vivre par conséquent vers le commencement du IIe siècle avant J.-C. Nous connaissons d'ailleurs en outre cet Alexandrin :

1° Par une citation de Diophante (*Sur les nombres poly-*

---

(1) Et aussi dans l'énoncé de la proposition II.

gones) qui donne la définition ordinaire de ces nombres en l'attribuant à Hypsiclès. On doit en conclure seulement que ce dernier avait écrit sur ce sujet, et sans doute sous la forme géométrique, un Traité qui était classique au temps de Diophante; ce Traité peut, au reste, être aussi considéré comme une continuation des livres arithmétiques d'Euclide;

2° Par un Opuscule très court, qui fait partie de la collection des petits écrits astronomiques, et qui est intitulé Ἀναφορικός (¹).

Je m'arrête un moment sur cet Opuscule peu connu, et dont l'importance historique dépasse de beaucoup la valeur intrinsèque (²).

Il s'agit de calculer, pour le climat d'Alexandrie, les ascensions obliques correspondant aux différents degrés de longitude sur l'écliptique. Le problème est résolu avec une grossière approximation et de telle sorte qu'il est impossible de supposer qu'Hipparque (³) ait eu quelque précurseur pour l'invention de la Trigonométrie. Mais en même temps le Traité d'Hypsiclès nous donne le premier exemple de la division du cercle en 360° et en fractions sexagésimales, minutes, secondes, tierces. Il marque donc le moment où cette division s'introduit dans la science grecque, mais où l'idée de dresser une Table des cordes n'est pas encore venue.

La solution d'Hypsiclès consiste d'ailleurs, connaissant les ascensions pour 0°, 90°, 180° (⁴), à interpoler en supposant que, si

(¹) Achille (Tatius), éd. Petau, p. 136, cite encore Hypsiclès comme ayant écrit, après Aratus et Ératosthène, sur l'harmonie des sphères.

(²) Il a été publié en grec latin par Jacques Mentel en 1657 (Paris, Cramoisy) à la suite de l'*Optique* de Damien, éditée par Bartholin; mais le texte est passablement incorrect et, pour apprécier la traduction, il suffira de dire que l'*omicron*, employé comme zéro dans la notation sexagésimale, est couramment rendu par le nombre 70.

(³) Le grand astronome vécut vers le milieu du IIᵉ siècle, c'est-à-dire qu'il semble appartenir à la génération suivant celle d'Hypsiclès.

(⁴) La première est en effet 0°, la troisième 180°; quant à la seconde, elle se représente par $\frac{n}{m+n}$ 180°, si le climat est défini par le rapport $\frac{m}{n}$ des durées du plus long jour et de la nuit la plus courte.

les longitudes croissent en progression arithmétique, il en sera de même pour les différences des ascensions.

Grâce à quelques lemmes préliminaires, il détermine la progression des différences, d'abord pour les signes, ensuite pour les degrés, et indique comment de cette progression se déduit la série des ascensions.

Nous rencontrons ainsi le premier essai d'une interpolation ayant lieu en fait suivant les ordonnées d'une courbe de la forme $y = a + bx + cx^2$, ou encore, si l'on veut, le premier pas de la théorie des différences finies.

Mais est-ce bien à Hypsiclès qu'il faut attribuer le principe de la solution qu'il expose? J'ai peine à le croire, car il nous apparaît moins comme un esprit original que comme un géomètre reprenant et éclaircissant des questions déjà connues. Il s'agit, d'autre part, d'un problème évidemment déjà posé chez les Chaldéens, et rien ne doit empêcher de croire qu'ils fussent capables de lui donner la même solution, surtout si l'on considère que les anciens s'attachaient en première ligne aux différences ascensionnelles et que c'étaient ces différences qu'ils appelaient proprement *ascensions* (ἀναφοραί) [1]. L'idée de les faire progresser arithmétiquement s'introduisait donc d'elle-même.

3. L'adjonction aux *Éléments* du Livre d'Hypsiclès, sur la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans la même sphère, a été d'autant moins légitime qu'il s'agissait là d'un problème plus spécial. Quant au Livre XV de la vulgate, la question a un autre aspect.

Si l'on écarte le début, l'examen de cinq cas, particuliers et sans intérêt, d'inscription d'un polyèdre régulier dans un autre, on ne peut nier que les deux questions suivantes : détermination du nombre des côtés et du nombre des sommets, construction de l'angle dièdre pour chaque polyèdre régulier, méritaient de figurer dans les *Éléments*.

Mais le style général du Livre trahit une époque de décadence

---

[1] Ainsi ils disaient « *ascension du Taureau* » pour différence des ascensions correspondant aux longitudes 60° et 30°, etc.

bien lointaine de l'âge classique auquel appartient du moins Hypsiclès, et l'on est d'accord désormais pour considérer cet Opuscule comme seulement du VIe siècle après J.-C.

Le maître de l'auteur anonyme, *le grand Isidore*, comme il l'appelle, et d'après lequel il résout la dernière question, doit être un des deux architectes de Sainte-Sophie, soit l'oncle, soit le neveu, qui portèrent ce nom sous Justinien. Nous avons donc là, moins un travail de véritables géomètres, que l'une des rares œuvres subsistantes de l'école d'ingénieurs qui illustra encore cette époque, au moment où s'éteignaient les derniers représentants de la Science pure.

Il est incontestable que les constructions d'Isidore de Milet sont aussi élégantes que sont pénibles les démonstrations qui en sont données. Cette différence même doit faire jeter un doute sur leur véritable origine, d'autant plus que l'invention n'en est pas expressément attribuée au personnage en question. Cependant, tant qu'on n'aura pas retrouvé une preuve de l'étude de problèmes semblables dans l'époque gréco-alexandrine, on peut rester dans l'indécision. En tout cas, les constructions dont il s'agit seraient bien ce qui aurait été fait de mieux en Géométrie élémentaire, au moins depuis Pappus.

4. C'est certainement dans ce dernier auteur qu'il aurait convenu de chercher de quoi compléter les *Éléments,* s'ils en avaient eu besoin.

On ne peut nier en thèse générale que les trois Livres d'Euclide sur les solides ne soient sensiblement inférieurs aux précédents [1], et l'on ne doit pas s'étonner que surtout la théorie des polyèdres réguliers ait été l'objet de tentatives de remaniement.

Or la quatrième Partie du Livre III de la *Collection mathématique* de Pappus (p. 132-163) nous offre tout d'abord précisément un remaniement complet du dernier Livre des *Éléments.* Le problème traité est absolument le même, l'inscription dans une sphère

---

[1] On voudra peut-être excepter de ces derniers le Xe Livre sur les irrationnelles; c'en était un qu'Apollonius avait aussi essayé de compléter par son travail sur les irrationnelles non classées.

donnée des cinq polyèdres réguliers; mais la méthode est toute différente, et, au lieu des théorèmes préliminaires d'Euclide, lesquels appartiennent à la Géométrie plane, on part de lemmes sur la sphère, où sont d'ailleurs appliquées des propositions que nous ne retrouvons que dans les *Sphériques* de Théodose (¹).

Rien ne nous indique quel est l'auteur de ce remaniement. S'il était de Pappus lui-même, il aurait sans doute pris soin de le marquer, surtout dans un Livre qui, à part le début, est évidemment une compilation. Le style et l'allure générale semblent d'une bonne époque, mais déjà assez loin d'Euclide. En tout cas, il est incontestable que l'auteur a eu pleine conscience de la véritable lacune de la stéréométrie d'Euclide; elle aurait dû comprendre en effet les éléments de la sphère, que le maître a laissés aux Traités composés en vue de l'étude de l'Astronomie.

La troisième et dernière Partie du Livre V de Pappus nous offre sur les polyèdres réguliers un autre travail qui ne correspond pas, à la vérité, à la comparaison des volumes et des surfaces de ces polyèdres inscrits dans une même sphère, telle que l'avait étudiée Aristée, mais qui, dans une certaine mesure, peut en tenir lieu. Pappus compare en fait les volumes de polyèdres réguliers ayant la même surface.

Il dit très nettement que les démonstrations synthétiques qu'il donne sont de lui; mais il reconnaît en même temps que plusieurs anciens avaient traité analytiquement la même question. D'autre part, il appuie ses démonstrations sur seize lemmes qui contiennent tous les éléments de la mesure des surfaces et volumes des polyèdres réguliers; mais ces lemmes, au milieu desquels nous retrouvons les propositions II et VII du livre d'Hypsiclès, n'appartiennent guère à Pappus que comme rédaction.

5. Les deux premières Parties du Livre V de Pappus sont, au reste, de celles où il est le plus facile de se rendre compte de la façon dont il composait sa *Collection mathématique*.

Après un curieux préambule où il présente la forme hexagonale

(¹) Quoiqu'elles fussent incontestablement connues bien avant cet auteur du Iᵉʳ siècle avant J.-C.

des cellules des abeilles comme motivée par la double condition d'offrir un polygone régulier dont l'angle fût une partie aliquote de quatre droits, et en même temps de correspondre au périmètre minimum pour une surface donnée, Pappus aborde en général la théorie des figures planes isopérimètres au point de vue de leur surface. Or nous possédons sur le même sujet un autre écrit qui, inséré dans le premier Livre du Commentaire de Théon d'Alexandrie sur la *Syntaxe* de Ptolémée, est mis sous le nom d'un Zénodore qui vivait probablement peu de temps après Archimède ([1]). La comparaison nous montre que Pappus s'est borné à donner une rédaction un peu différente de l'œuvre de Zénodore et n'a apporté aucun changement essentiel à une théorie déjà complète. Toutefois, il a ajouté la comparaison des segments de cercle dont l'arc est égal, et démontré que le plus grand est le demi-cercle.

Dans la seconde Partie du Livre V, Pappus, avant de passer à l'exposé des théories analogues relatives à la comparaison des solides ayant même surface, croit intéressant d'énumérer les treize polyèdres semi-réguliers découverts par Archimède et qui jouissent de cette propriété que leurs faces sont des polygones réguliers de différentes natures. Il indique, pour chacun de ces polyèdres, la composition des faces, le nombre des sommets et celui des arêtes; puis, abandonnant ce sujet ([2]), il démontre qu'à surface égale la sphère est supérieure en volume soit à un polyèdre régulier quelconque, soit à un cône ou à un cylindre. Zénodore avait déjà également traité les mêmes propositions; il les avait même étendues à tout solide engendré par la révolution d'un polygone rectiligne quelconque.

Pappus omet cette dernière démonstration, tandis qu'il reprend longuement la démonstration des théorèmes d'Archimède sur la mesure du volume et de la surface de la sphère, du cône et du cylindre. La marche qu'il suit se rapproche d'ailleurs sensible-

---

([1]) Hultsch, p. 1189 de l'édition de Pappus. Le commentaire attribué à Théon est au reste, en assez grande partie, dû à Pappus; on a encore un autre petit travail anonyme sur les isopérimètres, publié par Hultsch (Pappus, p. 1156-1165) et provenant d'un Recueil de commentaires sur Ptolémée; mais, cette fois, on est plutôt en présence d'un remaniement de l'œuvre de Pappus.

([2]) On sait que la curieuse théorie des polyèdres d'Archimède a été restituée par Kepler (*Harmonia mundi*, p. 62-65; 1619).

ment de celle qu'on observe d'ordinaire aujourd'hui pour la même théorie en Géométrie élémentaire; il y a là évidemment, au point de vue de la forme, un progrès réalisé depuis Archimède, mais comme fond il n'y a rien de nouveau.

Même en admettant que cette nouvelle exposition appartienne exclusivement à Pappus, on voit qu'au moins, dans tout son Livre V, il travaille plutôt à exposer ce qui est déjà connu et à améliorer les théories dues aux anciens mathématiciens qu'à poursuivre des travaux originaux. L'ensemble de la *Collection mathématique* porte en général le même caractère, et il est certain qu'on attribue à Pappus beaucoup de propositions qui ne lui appartiennent pas plus que la plupart des théorèmes développés dans nos livres d'enseignement n'appartiennent aux auteurs de ces Ouvrages (1).

6. Si l'on cherche dans le recueil de Pappus d'autres théories rentrant dans le cadre des *Éléments,* il ne faut pas s'écarter des Livres III et IV (2).

Dans le premier de ces deux Livres, on peut signaler les propositions 28 à 42, qui paraissent empruntées à un Ouvrage intitulé *Paradoxes* et composé par un Erycinos dont l'époque est inconnue, mais qui vivait probablement bien longtemps avant Pappus.

Il s'agit, dans ces *Paradoxes,* de construire à l'intérieur d'un triangle (ou plus généralement d'un polygone) un autre triangle (polygone) ayant pour base une partie de l'un des côtés et tel que la somme des autres côtés du triangle (polygone) intérieur soit à celle des autres de l'extérieur dans un rapport donné (égal ou plus grand). Ou bien encore il s'agit de construire un triangle ou un parallélogramme de surface plus petite qu'une figure similaire, mais ayant chacun de ses côtés plus grand suivant une relation donnée. Les solutions d'Erycinos sont assez élégantes, et, malgré

(1) Il faut cependant excepter le théorème connu sous le nom de *Guldin,* que Pappus énonce comme étant son invention et qui constitue, sans contredit, son véritable titre de gloire.

(2) On sait que le Livre I est perdu; ce qui reste du IIe concerne l'Arithmétique; VI est relatif à l'Astronomie, VII à l'Analyse géométrique, VIII à la Mécanique.

le peu d'intérêt que présentent ces problèmes en eux-mêmes, la première série pourrait encore aujourd'hui offrir quelques exercices utiles.

La première proposition de ce qui nous reste du Livre IV nous offre une intéressante généralisation du théorème sur le carré de l'hypoténuse.

Soit un triangle quelconque ABC : sur les côtés AB, BC on construit deux parallélogrammes quelconques ABED, BCFH. On prolonge les droites DE, FH jusqu'à leur rencontre en G, on joint GB. Pour construire sur la base AC du triangle un parallélogramme dont la surface soit égale à la somme de celles des deux premiers, il suffit de mener par A, C des parallèles à GB jusqu'à leur rencontre en L, M avec les côtés des parallélogrammes DE, FH et de joindre L, M.

Nous pouvons certainement regretter le début du Livre IV, si court qu'il paraisse avoir été, car il devait être consacré à des théorèmes analogues.

Les dix-sept propositions de Pappus qui suivent appartiennent encore au même ordre d'idées que les *Éléments;* mais elles paraissent empruntées, comme fond, soit aux Livres des *Contacts* d'Apollonius (Pappus traite notamment le problème de mener un cercle tangent à trois cercles qui se touchent entre eux), soit à des travaux sur la figure de l'ἄρβηλον (tranchet) inventé par Archimède (¹).

Soient deux demi-cercles A et B se touchant extérieurement à une extrémité de leurs diamètres ; soit un troisième demi-cercle C, ayant son centre sur le même diamètre et les enveloppant en les touchant. Dans l'espace compris entre A, B et C, on inscrit un cercle D_0 ; dans l'espace entre C, D_0 et A (supposé plus grand que B), un second cercle D_1 ; entre C_1, D_1 et A, un troisième D_2 et ainsi de suite ; soient d_0, d_1, d_2, ... les distances des centres de D_0, D_1, D_2, ... au diamètre sur lequel sont construits les demi-cercles A,

(¹) Dans l'écrit arabe, les *Lemmes* attribués à Archimède, les lemmes 1, 4, 5 et 6 se retrouvent chez Pappus. Celui-ci dit seulement que la proposition qu'il développe est ancienne et se trouve dans divers Ouvrages ; peut-être l'Ouvrage original d'Archimède était-il déjà perdu, et Pappus n'était-il pas suffisamment assuré de la valeur de la tradition relative à l'ἄρβηλον.

B, C; si D_n représente le diamètre du cercle correspondant, on aura

$$d_n = (n + 1) D_n.$$

7. On sait du reste qu'en dehors des écrits qui nous restent d'Archimède et d'Apollonius, c'est uniquement dans la *Collection* de Pappus qu'il faut étudier la Géométrie supérieure des anciens; on sait aussi que cette Géométrie se divisait en deux branches bien distinctes : l'une, suivant les voies nouvelles ouvertes par le génie du Syracusain, s'élevait à l'invention de courbes et de surfaces et abordait les problèmes des quadratures et des tangentes; l'autre, ne dépassant ni le domaine déjà exploré avant Euclide, ni le cadre général de ses travaux, développait de plus près les germes contenus dans les *Éléments* en approfondissant la Géométrie de la droite et du cercle et en étudiant les propriétés des coniques.

C'est sur ce terrain, dans le τόπος ἀναλυόμενος, comme l'appelle Pappus, que l'effort de la Géométrie ancienne a été le mieux suivi et a produit les résultats les plus complets; mais nous devons réserver pour une étude ultérieure l'histoire de ces travaux et revenir à ceux qui ont spécialement concerné les Éléments. Bornons-nous donc, pour le moment, à résumer les conclusions qui ressortent de ce Chapitre.

On semble avoir eu pleinement conscience, dès l'antiquité, des lacunes frappantes que présente le cadre étroit des *Éléments*. Pour combler ces lacunes, les modernes y ont, d'une part, fait entrer la matière de Livres d'Archimède : *De la mesure du cercle; De la sphère et du cylindre;* d'un autre côté, ils y ont réuni les éléments de la sphérique des anciens. La *Collection* de Pappus témoigne déjà de quelques tentatives faites dans ce sens.

Mais ces tentatives n'ont pas abouti à une réforme de l'enseignement qui eût nécessité une refonte complète des derniers Livres d'Euclide. Les autres lacunes de détail qu'on pourrait signaler dans les *Éléments* se trouvèrent d'ailleurs comblées dans les Ouvrages consacrés à l'analyse géométrique. L'œuvre d'Euclide ne reçut donc, comme adjonction, pendant toute l'antiquité, que quelques travaux relatifs aux polyèdres réguliers; mais ceux qui furent choisis pour cette adjonction n'ont guère dû, ce semble,

cette faveur qu'à leur brièveté, et d'autres ont été négligés qui sans doute valaient mieux. Enfin, quoique l'un de ces écrits soit des derniers jours de l'antiquité, on ne voit guère qu'aucun travail sérieux de Géométrie élémentaire ait été fait après la période alexandrine, et à partir de l'établissement de l'empire romain.

CHAPITRE XIII.

Héron sur Euclide.

1. Après avoir indiqué les additions que reçut, dans l'antiquité, le cadre des *Éléments* d'Euclide, nous avons à rechercher quels travaux furent tentés ou accomplis à l'intérieur de ce cadre même. Mais désormais le champ de notre étude se restreint singulièrement, car des deux seuls documents grecs auxquels nous puissions recourir, l'un, le *Commentaire de Proclus*, se borne au premier Livre des *Éléments*, l'autre, les *Définitions des termes de Géométrie*, attribuées à Héron, ne touche ni les théorèmes, ni leurs démonstrations.

Il existe cependant, dans un manuscrit arabe, sur les six premiers Livres, une suite de scolies qui portent le nom de Héron. Cette troisième source n'a pas été utilisée jusqu'à présent, et, en attendant la traduction que prépare mon excellent ami Léon Rodet, je ne puis moi-même en faire qu'un usage restreint. Il m'est cependant loisible d'entrer dans des détails suffisants pour en faire reconnaître l'importance et pour indiquer les principales conclusions qu'on peut tirer de son étude.

Je dois dire d'abord comment j'ai été amené à y recourir. Une grave question, et des plus difficiles à élucider complètement, se pose à propos d'Euclide. A partir de quel moment les *Éléments* sont-ils devenus classiques pour l'enseignement de la Géométrie dans l'antiquité? Quand, par suite, a-t-on commencé à les commenter comme un Ouvrage classique?

Dans des essais spéciaux (¹) où j'ai déjà abordé cette question, j'ai cherché à montrer que l'adoption universelle des *Éléments* ne paraît pas avoir eu lieu immédiatement ni s'être effectuée sans

---

(¹) Publiés dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* : *Quelques fragments d'Apollonius de Perge*, 1881. — *Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus*, 1882. — *Les axiomes d'Euclide*, 1885.

certaines tentatives de modifications, dont une au moins a réussi; car le titre de *notions communes* (κοιναὶ ἔννοιαι), donné aux axiomes, est bien certainement une expression stoïcienne, et l'on peut croire qu'il n'a pas seulement été substitué à un autre, mais bien mis en tête d'une liste de propositions admises par Euclide sans démonstration, sans que lui-même eût cru utile de les réunir ainsi qu'elles l'ont été après lui.

Dans un travail dont le caractère ne peut être exactement défini, Apollonius, procédant également suivant les idées de l'École du Portique, proposa une série de définitions dans lesquelles il insista sur l'origine concrète des notions géométriques. Il indiqua également diverses autres modifications de détail relatives, soit aux axiomes, soit aux propositions.

Quant à Héron d'Alexandrie, M. Cantor avait déjà soutenu l'opinion qu'il était assez improbable qu'un auteur paraissant aussi original se fût astreint à commenter les *Éléments*. A la vérité, de son temps, l'Ouvrage était probablement devenu partout classique; c'est bien en effet celui que vise l'épicurien Zénon, de Sidon, dans son Ouvrage contre la certitude géométrique, que réfuta Posidonius (*Proclus*, 199, etc.). Mais on semble toutefois encore loin de l'âge réel des commentateurs.

J'ai donc essayé de montrer que les citations de Héron dans Proclus ne suffisaient point pour conclure à l'existence d'un Commentaire de Héron sur Euclide; qu'elles pouvaient avoir été empruntées par Porphyre ou Pappus au grand Ouvrage de Héron sur la Géométrie pratique. J'admettais implicitement la même origine pour les scolies arabes que je trouvais mentionnés, d'après Fabricius, dans un manuscrit oriental de la Bibliothèque de l'Université de Leyde : « *Euclidis Pythagoræi* Elementorum libri VI, cum commentariis *Saidi ben Masoud* et cum scholiis *Heronis* ad quædam problemata. »

Toutefois, en présence des objections adressées par Heiberg à mes conclusions, j'ai jugé utile de vérifier ce que pouvaient être en réalité ces scolies de Héron, et je me hâte de dire que cette vérification m'a conduit à reconnaître le mal-fondé de la thèse que je soutenais après M. Cantor. Héron a effectivement écrit un Commentaire sur Euclide, et même ce Commentaire, auquel Porphyre et Pappus ont fait dans la suite de nombreux emprunts, est

loin d'être de nature à rehausser l'idée que nous nous faisons de l'ingénieur alexandrin.

2. Le curateur de la Bibliothèque de l'Université de Leyde et le conservateur du legs warnérien ont bien voulu mettre à ma disposition, avec la plus gracieuse libéralité, le manuscrit dont j'ai parlé, pendant tout le temps nécessaire pour prendre copie des Commentaires sur Euclide.

Ce manuscrit, le *Warnerianus* 399, numéroté 1068 dans le Catalogue de 1716, paraît deux fois dans le Catalogue de 1845, d'une part sous le n° 965 pour la première Partie qui contient les *Éléments* d'Euclide, de l'autre sous le n° 988 pour la seconde Partie, les *Sphériques* de Ménélas. Le Catalogue moderne ne renferme plus d'ailleurs la mention de Héron, mais donne, en latin, la Notice suivante pour le n° 965.

« *Éléments* d'Euclide, d'après la version d'el-Hajjâj-ben-Yusuf-Matar (¹), avec un Commentaire dont l'auteur est Abul-Abbas-el-Fadl-ben-Hàtim-an-Nirizi, géomètre et astronome assez connu du IIIe siècle de l'hégire. Ce manuscrit contient en outre des gloses sur ce Commentaire, de Séid-ben-Masoud-ben-Alkass-Billah, qui paraît avoir vécu au ve siècle. Le copiste (Abou-Saïd-Mohammed-al-Baihaki-al-Barzuhi) s'est arrêté au commencement du Livre VII. La souscription atteste que le Livre VI a été terminé en 539 (1144/5 de notre ère). Nous avons donc ici un manuscrit ancien, du reste correctement écrit et, autant qu'on le sache, unique. »

On ne connaît pas en effet d'autre exemplaire de la version de Hajjâj, la plus ancienne traduction d'Euclide en arabe, qui a été faite sous le khalifat d'Haroun-al-Reschid et corrigée par Hajjâj lui-même sous celui d'Almamoun. On croit toutefois que les Livres XI à XIII (des solides) de cette version sont contenus dans le manuscrit 81 de Copenhague, qui a été examiné, ainsi que celui de Leyde, par Klamroth [*Ueber den arabischen Euklid* (²)]; mais le savant orientaliste n'a pas porté son attention sur le travail

(¹) Ce renseignement est tiré de la Préface. Le frontispice attribue au contraire à Ishaq-ben-Honein la traduction du Livre « d'Euclide le pythagoricien ».

(²) *Zeitschrift der deutschen morgenlændischen Gesellschaft*, t. XXXV, p. 270-326; 1881.

d'el-Fadl, qui, comme le dit la Préface, a été extrait par lui des commentaires de géomètres anciens.

Or, c'est dans cette compilation que revient assez fréquemment le nom de Héron, comme celui de l'un des principaux auteurs qui ont servi à la former. L'authenticité des extraits ainsi attribués à Héron peut d'ailleurs être démontrée facilement, si on les rapproche du commentaire de Proclus.

Je me bornerai à faire ce rapprochement sur deux points, que je choisirai d'ailleurs de manière à indiquer suffisamment le caractère du travail de Héron et à montrer en même temps que nombre de démonstrations, données par Proclus sans aucune référence, dérivent en réalité de l'Alexandrin.

3. On sait que la première proposition d'Euclide consiste à construire un triangle équilatéral sur une droite donnée comme base. Comme, dans ses postulats de construction, il ne se donne pas la liberté de prendre à partir d'un point donné une longueur donnée, sa première proposition lui sert à résoudre immédiatement cette seconde question.

Or, dans Proclus (p. 218-219), nous voyons résoudre les problèmes de construire, sur une base donnée, comme première proposition, soit un triangle isoscèle, soit un triangle scalène.

Pour l'isoscèle, il prolonge la ligne AB dans les deux sens, et, en décrivant des points A et B comme centres des cercles (A) et (B), il peut prendre, sur chacun de ces prolongements, des longueurs AC, BD égales à AB. Dès lors, en gardant les mêmes centres, mais en prenant pour rayon $AD = BC$, il obtient par l'intersection de deux nouveaux cercles (C) et (D) le sommet d'un triangle isoscèle ayant AB pour base [1].

Pour le triangle scalène, il lui suffit, après avoir décrit les

[1] Je n'insiste pas sur la singularité de cette solution. Il faut se rendre compte du but proposé, qui est évidemment, non pas de construire un triangle isoscèle en général, mais de substituer, pour la solution du problème II, à l'équilatéral d'Euclide un isoscèle construit en restant dans le même ordre d'idées. Toutefois, avec les mêmes postulats de construction et sans s'appuyer sur aucun théorème, il est possible de construire, sur une base donnée, un isoscèle quelconque. Ce problème se trouve résolu dans un scolie grec inédit (Ms de la Bibliothèque nationale, fonds grec 2472, fol. 196 v.).

cercles (A), (B), de prendre comme sommet un point quelconque intérieur à (A) et extérieur à (B).

« Tout cela est rebattu », ajoute Proclus, preuve bien claire qu'il emprunte les solutions qu'il vient de reproduire. Voyons maintenant ce que nous donne le commentaire arabe sur la proposition I d'Euclide.

Héron. — « Si l'on nous demande pourquoi Euclide s'est proposé tout d'abord de construire sur une ligne donnée un triangle équilatéral, sans se préoccuper de commencer par un triangle isoscèle, je répondrai qu'il n'a pas agi ainsi par impuissance, mais parce que la facilité et la brièveté de la construction du triangle équilatéral convenaient mieux à un début. Mais, quand on peut faire l'une de ces constructions, on peut faire l'autre, et l'une peut être substituée à l'autre.

» Je vais au reste enseigner la construction d'un triangle isoscèle sur une droite donnée. D'abord supposons la figure. » Suit identiquement la construction de Proclus, qui paraît seulement avoir un peu abrégé la démonstration.

« Je vais maintenant montrer comment on peut, sur une droite donnée, construire un triangle scalène. Je considérerai trois cas :

» 1er *cas*. — La droite donnée est plus grande que l'un des côtés et plus petite que l'autre. » Suit la construction de Proclus.

« 2e *cas*. — La droite donnée est plus petite que chacun des deux autres côtés.

» 3e *cas*. — La droite donnée est plus grande que chacun des deux autres côtés. »

Pour ces deux derniers cas, que Proclus avait évidemment sous les yeux, mais qu'il a négligés, Héron procède toujours de la même façon; pour le dernier, il se contente d'ailleurs de prendre le sommet du scalène dans la partie commune aux deux cercles (A), (B), sans se préoccuper de la possibilité que le triangle soit alors isoscèle; pour le cas précédent, il choisit un point sur la circonférence du cercle (D) et à l'extérieur du cercle (A). Je crois inutile de reproduire les démonstrations, qui n'ont aucun intérêt.

4. J'emprunterai le second exemple au commentaire sur la

proposition I, 47 (théorème sur le carré de l'hypoténuse). Proclus (p. 429) nous dit : « La démonstration du Maître étant très claire, je pense qu'il faut n'y rien ajouter de superflu, mais se contenter du texte, car ceux qui ont voulu y faire des additions, comme Pappus après Héron (οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον), ont été forcés de prendre comme lemmes des propositions démontrées dans le Livre VI, sans aucun résultat utile pour la matière traitée. »

La clef de ce passage nous est donnée par le manuscrit de Leyde ; l'addition faite par Héron consiste à prouver que les trois lignes auxiliaires employées dans la démonstration euclidienne se coupent en un même point.

Or il est clair que la preuve naturelle doit s'appuyer sur la théorie de la similitude, c'est-à-dire sur le Livre VI. Héron a réalisé le tour de force, un peu puéril, de se passer de cette théorie ; mais, pour cela, il a été obligé, comme le dit Proclus, d'établir quelques lemmes préalables, qui découlent immédiatement du principe de la similitude, tandis qu'il les démontre à l'aide d'artifices analogues à ceux dont Euclide s'est servi dans son Livre I, pour éviter d'avoir recours à ce principe.

Ainsi le premier de ces lemmes est le suivant :

« 1. Si, dans un triangle ABC, on mène DE parallèle à la base BC, que l'on prenne le milieu F de BC et qu'on le joigne au sommet A, la droite AF coupera DE en un point G qui en sera le milieu.

» En effet, menons par A, HK parallèle à BC, par D et E, HDL et KEM parallèles à AGF, joignons enfin DF et EF. Les triangles ABF, ACF sont équivalents, comme ayant des bases égales, et leur sommet A commun. Les triangles BDF et FEC sont aussi équivalents comme ayant des bases égales BF = FC, et étant compris entre les mêmes parallèles BC, DE. Retranchons membre à membre, il y aura équivalence entre les triangles ADF et AEF, dont la base commune AF est également la base des parallélogrammes AL, AM. Ces parallélogrammes, d'après le raisonnement d'Euclide (I, 41), seront donc équivalents : donc, etc. »

Ce premier lemme sert à démontrer le second, qui se rapporte au cas où la parallèle à la base, au lieu de couper le triangle, coupe les prolongements des côtés et de la médiane au delà du

sommet A. La démonstration se fait en construisant une parallèle symétrique du côté de la base; cette construction s'effectue en reportant sur les côtés, à partir du sommet, les longueurs des segments interceptés sur leurs prolongements; on démontre facilement le parallélisme à la base de la droite qui joint les points ainsi obtenus, et l'on applique le lemme I.

Mais préalablement Héron (à moins que ce ne soit le commentateur arabe) se croit obligé à la démonstration bien inutile de ce fait que, si l'un des points symétriques par rapport à A des intersections des côtés prolongés avec la parallèle tombe d'un côté de la base, l'autre tombera du même côté.

« Si, dit-il, on mène entre deux parallèles AB, CD trois droites AD, BC, EF, se coupant en un même point G, je dis que, si CF = FD, on aura AE = EB.

» Pour le démontrer, je dis d'abord que, suivant que l'on aura AG plus grand que, égal à ou plus petit que GD, on aura de même BG plus grand que, égal à ou plus petit que GC. Ainsi supposons AG > GD, je dis que BG sera > GC; car il ne peut être ni égal ni plus petit.

» Si, en effet, on avait BG = GC, prenant, sur GD, GM = AG, les côtés AG, GB du triangle AGB seraient respectivement égaux aux côtés MG, GC du triangle MGC, et l'angle compris

AGB = CGM (prop. 15).

Dès lors, d'après (4), les triangles sont égaux : donc les angles GCM et ABG seront égaux; donc (27) CM sera parallèle à AB; donc (30) elle sera parallèle à CD; or ces droites se coupent, ce qui est absurde. On ne peut donc avoir BG = GC.

« Si maintenant on avait BG < GC, prenant, sur GC, GK = BG et joignant KM, on démontrera de même que KM est parallèle à AB, donc à CD, ce qui est absurde.

» De même, si l'on a AG = GD, on démontrera que BG ne peut être ni plus grand ni plus petit que GC, qu'il lui est donc égal. De même, si AG < GD, on prouvera que BG < GC. »

Suit la démonstration proprement dite du lemme énoncé.

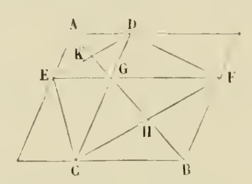
Le troisième lemme est plus intéressant, et c'est lui qui con-

stitue en fait le nerf de la démonstration pour la proposition à prouver.

Ce lemme est la réciproque d'Euclide, I, 43. Il s'agit de prouver que, si un parallélogramme AB est découpé en quatre autres ADGE, DF, FGCB, CE, en sorte que DF et CE soient équivalents, le sommet commun G sera sur la diagonale AB (*fig.* 1).

Pour le prouver, Héron prolonge AG jusqu'à la rencontre en H avec FC, et joint HB. Il s'agit de prouver que HB est dans le prolongement de AH.

Fig. 1.



Les autres lignes de la figure étant tracées, « les aires DF, EC étant égales, les triangles DGF, ECG seront équivalents. Ajoutant à chacun le triangle GCF, les triangles DCF, ECF seront équivalents. Comme ils ont même base CF, d'après (40), CF sera parallèle à DE. Mais, d'après (34), (29) et (26), les triangles AEK, DKG seront égaux : donc EK = KD; donc, d'après le lemme II, CH = HF. Mais (34) BF = CG et les angles BFH = HCG. Donc (4) les triangles sont égaux, BH = HG et les angles BHF = CHG. Ajoutant de part et d'autre l'angle GHF, la somme des angles CHG + GHF = BHF + GHF. Mais la première somme est égale à deux droits, donc aussi la seconde. Ainsi, du point H de la droite CF, on a mené, de part et d'autre de cette droite, HA et HB qui font avec elle et d'un même côté des angles dont la somme est de deux droits. Donc HA et HB sont en ligne droite ».

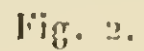
C. Q. F. D.

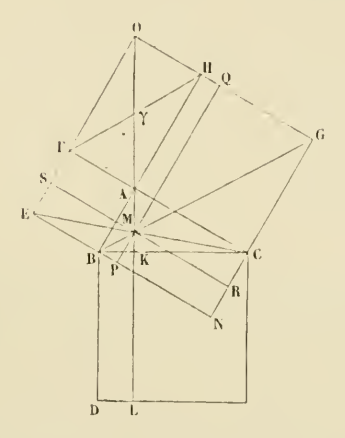
Nous arrivons enfin à la proposition qu'il s'agit de démontrer.

« Soit ABC un triangle rectangle en A (*fig.* 2); construisons sur BC le carré CD, sur AB le carré ABEF, sur AC le carré ACGH. Menons, par A, AKL perpendiculaire sur BC, joignons EC, qui coupe AL en M, joignons MB et MG; je dis que ces deux droites sont sur le prolongement l'une de l'autre.

» Prolongeons EB et GC jusqu'à leur rencontre en N, et leurs parallèles GH, EF jusqu'à leur rencontre en O; menons par M PMQ parallèle à EO, et SMR parallèle à FC; joignons OA, HF.

» Comme HA = AC, que FA = AB et que les angles FAH = BAC, les triangles sont égaux; donc BC = HF et les angles ABC = HFA. Mais, comme AK est perpendiculaire à la base du triangle rectangle, les angles ABC = CAK, et, d'autre part, les diagonales FH, AO se coupant en Y, et FY étant égal à YA, les angles HFA = OAF.


Fig. 2.



Donc les angles OAF = CAK. Ajoutons OAC de part et d'autre; OAC + OAF = MAC + CAO. Mais (13) la première somme est de deux droits; donc aussi la seconde; donc OAM est une ligne droite.

» Or elle est la diagonale du parallélogramme OM; dès lors, d'après (43), les aires AS = AQ. Ajoutons de part et d'autre l'aire AM, les aires MH = MF. Mais, dans le parallélogramme FN coupé par la diagonale EMC, les aires MF = MN. Il y a donc égalité entre les aires MN, MH. Dès lors, d'après le lemme III, BM et MG sont en ligne droite. » C. Q. F. D.

5. Sur la proposition 48 et dernière du premier Livre (réciproque du théorème sur le carré de l'hypoténuse), nous retrouvons encore dans le Commentaire arabe, sous le nom de Héron, la

démonstration anonyme donnée par Proclus; les lettres [1], différentes de celles d'Euclide, se correspondent exactement, comme, au reste, pour le Commentaire sur la proposition I. Seulement, dans cette démonstration par l'absurde, la seconde hypothèse, développée par Proclus comme la première, ne l'est pas dans le texte arabe, où il est seulement indiqué qu'elle se traiterait de même.

Ces extraits suffisent pour le but que je m'étais proposé. Il est clair que, si intéressants que puissent être historiquement les scolies arabes qui portent le nom de Héron, on ne peut guère leur attribuer une valeur scientifique considérable. Dans les autres Livres pour lesquels le Commentaire de Proclus est perdu, il n'y a guère de remarquable [2] que l'idée de démontrer sans figures les propositions du Livre II, à partir de la seconde, comme conséquences analytiques de la première, à savoir

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad.$$

En tout cas, une question assez grave doit se poser : Est-il probable que le Commentaire de Héron ait encore subsisté intégralement chez les Arabes, et soit tombé entre les mains du Nirizi, vers l'an 900 de notre ère?

Je n'hésite pas à répondre non : tout d'abord, il est certain que nous sommes loin d'avoir en entier ce Commentaire. Ainsi, dans le texte arabe, rien absolument ne correspond à telle citation expresse de Proclus (ex. p. 305). A en juger par ce qui nous reste, le Commentaire de Héron paraît avoir été très complet et très détaillé; mais il n'a été utilisé que d'une façon très inégale et tout à fait insuffisante pour donner une idée exacte de son étendue.

En second lieu, rien ne nous prouve que le Nirizi ait traduit du grec les extraits qu'il nous a conservés; il cite des commentateurs arabes qui l'avaient précédé, par exemple Al-Kindi. Ces extraits

---

(1) Dans ce qui précède, j'ai substitué, aux lettres grecques supposées par les lettres arabes, les romaines de même rang, en ne comptant pas J comme lettre.

(2) J'observe, à titre de curiosité, que, dans le Livre III, Héron intervertissait l'ordre des propositions 5 et 6, le cas de tangence de deux cercles lui paraissant devoir précéder le cas d'intersection.

peuvent donc avoir été faits par l'un de ces commentateurs.

Enfin ils peuvent avoir été transmis aux Arabes dans un Commentaire grec d'une époque bien postérieure à Héron. A la vérité, le Nirizi ne paraît aucunement connaître ni Porphyre, ni Pappus, ni Proclus. Il sait toutefois que le *postulatum* des parallèles a été l'objet de tentatives de démonstration de la part de Ptolémée et de Diodore (¹). D'autre part, son Commentaire sur les définitions et les axiomes du premier Livre est emprunté à un auteur grec dont le nom ne peut être transcrit que sous la forme *Simplicius* (²).

Est-ce le fécond commentateur du VIᵉ siècle? A côté d'Aristote, aura-t-il, lui aussi, entrepris Euclide, et son œuvre se sera-t-elle conservée en Perse, grâce à ses relations dans ce pays, tandis que toute autre trace en a disparu pour nous? On ne peut à cet égard formuler que des conjectures. Mais, si c'est bien lui et s'il a eu le commentaire de Héron à sa disposition, on ne peut douter, d'après ses habitudes, qu'il n'en ait fait de fréquents extraits dont il aura soigneusement indiqué la source.

En tous cas, l'existence du travail de ce *Simplicius* est bien constatée, et le plus probable, quant à la transmission des scolies de Héron aux Arabes, me paraît être qu'elle se sera faite par cet intermédiaire. Mais, comme il est difficile d'assigner à cet auteur une date tant soit peu reculée, même si l'on ne voulait pas l'identifier avec le philosophe du VIᵉ siècle de notre ère, plusieurs difficultés surgissent.

Avait-il lui-même le Commentaire de Héron entre les mains? On doit le penser; car, s'il en avait, comme Proclus, emprunté les extraits à Porphyre et à Pappus, il aurait sans doute utilisé également ces derniers auteurs auxquels on ne peut certainement refuser un certain degré d'originalité (³), et l'on devrait retrouver leurs traces dans les scolies arabes. Au contraire, s'il avait retrouvé

(¹) Nous n'en savions rien pour ce dernier, qui est probablement le mathématicien alexandrin vivant vers la fin du Iᵉʳ siècle avant notre ère.

(²) Le Commentaire sur les définitions est malheureusement perdu en presque totalité, par suite d'une lacune d'un feuillet dans le manuscrit. Sur les axiomes, Héron n'apparaît que pour une courte remarque d'un caractère tout à fait général.

(³) Comme au contraire Proclus n'est nullement original, on peut très bien admettre que Simplicius n'ait pas tenu compte de son travail.

l'Ouvrage de Héron, on comprend qu'il ait pu négliger les commentateurs postérieurs.

On arrive donc à cette conclusion que le travail de Héron sur Euclide devait encore exister au temps de Proclus; ce dernier aurait donc pu l'utiliser directement. Mais cela n'entraîne nullement comme conséquence qu'il l'ait réellement utilisé de la sorte, et je ne vois aucun motif de rétracter l'opinion contraire que j'ai émise en discutant la question des sources de Proclus.

CHAPITRE XIV.

Les « Définitions » du pseudo-Héron.

1. Les extraits que j'ai donnés, d'après le manuscrit arabe de Leyde, du Commentaire de Héron sur Euclide, pourraient peut-être produire l'impression que ce travail aurait été moins un commentaire proprement dit qu'une suite de lemmes analogues, dans une certaine mesure, à ceux que Pappus nous a conservés sur les Ouvrages d'Analyse géométrique des anciens, au Livre VII de sa *Collection mathématique*.

Pour montrer que cette impression serait inexacte, il me serait facile de faire de nouvelles citations décisives des scolies héroniens relatifs aux propositions (¹); mais je préfère indiquer ceux qui subsistent sur les définitions des Livres autres que le premier, le commentaire arabe sur celles du Livre I étant perdu, comme je l'ai dit.

Sur la définition II, 1, Héron remarque que la raison pour laquelle Euclide la limite au parallélogramme rectangle est que la mesure de la surface de ce rectangle est donnée par le produit des deux côtés de l'angle droit.

Sur III, déf. 1, où Euclide définit l'égalité des cercles par celle des diamètres ou par celle des rayons, Héron prouve que ces deux définitions n'en font qu'une.

Sur III, déf. 4 (égalité de distance des cordes au centre), il remarque que la distance d'un point à une droite se mesure par la perpendiculaire abaissée du point sur la droite, en raison de la propriété de cette perpendiculaire d'être la plus courte ligne allant du point à la droite.

Sur III, déf. 9, il observe que l'expression d'Euclide « un angle a pour base un arc » (ἐπὶ περιφερείας λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία) s'ap-

(¹) En fait, la plus grande partie de ces scolies consiste à répéter les démonstrations euclidiennes dans d'autres cas des figures ou à prouver l'impossibilité des cas auxquels ces démonstrations ne s'appliqueraient pas.

plique en fait, soit à l'angle qui a son sommet au centre, soit à ceux qui ont leur sommet à la circonférence.

Après III, déf. 11, il distingue comme figures dérivées du cercle par son intersection avec une droite ou avec un cercle le segment, la lunule et l'amphicyrte (¹).

Enfin sur IV, déf. 1 et 2 (figures inscrites ou circonscrites à une figure), nous lisons : « Quelques personnes ont demandé pourquoi le géomètre a donné ces définitions, puisqu'il ne voulait traiter que de l'inscription ou de la circonscription par rapport à un cercle ; nous répondrons qu'il a agi de la sorte pour la perfection de son enseignement. »

Je n'insiste pas sur le caractère de ces divers scolies ; évidemment, ils proviennent d'un véritable commentaire et l'on peut ajouter d'un commentaire dont le niveau n'était guère élevé. Mais on remarquera qu'en tous cas il n'y a aucun rapport entre ces scolies et le contenu de l'opuscule des *Définitions des termes de Géométrie*, attribué à Héron.

2. Cet Opuscule nous est présenté comme constituant des *Prolégomènes aux Éléments de Géométrie* et comme correspondant à des *Prolégomènes aux Éléments d'Arithmétique*, écrits par le même auteur, et que nous n'avons plus. C'est une compilation des diverses définitions géométriques ; dans cette compilation, si les formules adoptées par Euclide sont généralement énoncées avant les autres, l'ordre d'Euclide n'est nullement respecté ; des idées qui lui sont étrangères sont introduites et dérangent souvent cet ordre. Si donc ces *Prolégomènes* avaient été rédigés par Héron, ils l'auraient été, en tous cas, indépendamment de son commentaire sur Euclide, dont les fragments qui nous restent ne témoignent d'ailleurs d'aucune communauté d'origine avec l'Opuscule contesté.

(¹) C'est-à-dire la partie commune aux deux cercles qui se coupent, les lunules étant au contraire les parties non communes. Avant cette distinction, vient une remarque assez inintelligible. « Nous savions déjà que, quand deux segments sont égaux, les angles inscrits sont égaux ; réciproquement, si les angles sont égaux, les segments le seront. » Héron avait-il énoncé déjà sur III, déf. 9, le théorème de l'égalité des angles inscrits dans le même segment ?

L'existence du commentaire de Héron sur Euclide n'est donc, en fait, nullement favorable à l'attribution au même géomètre de l'Opuscule qui nous occupe. Cette attribution repose d'ailleurs sur deux motifs : l'un est l'inscription que portent les manuscrits; l'autre est que l'ensemble du texte, en faisant abstraction de quelques additions et remaniements postérieurs, paraît bien correspondre, en réalité, à une époque voisine de celle de Héron.

Ce second motif peut être écarté, si l'on admet que l'auteur des *Prolégomènes,* auquel on doit, semble-t-il, attribuer la majeure partie des remaniements dont j'ai parlé, a copié une compilation faite dans le courant du Ier siècle avant l'ère chrétienne ou bien effectué lui-même cette compilation sur un Ouvrage plus étendu, par exemple celui de Geminus.

Quant à l'inscription des manuscrits, on peut l'expliquer de différentes façons. Je me bornerai à développer celle qui me paraît aujourd'hui la plus plausible.

Dans les manuscrits, l'Opuscule des *Définitions* précède toujours des extraits d'Anatolius et de Proclus, mais dans l'intervalle sont insérés : 1° une Table métrologique sur le modèle de celles de Héron; 2° des extraits des *Introductions de Géométrie* de Héron, tirés de son grand Ouvrage de Géométrie pratique; 3° les postulats et les notions communes d'Euclide. L'ensemble de la compilation étant anonyme, le nom de Héron inscrit en regard soit du préambule de la Table métrologique, soit des extraits authentiques qui suivent, a très bien pu, du fait d'un copiste déjà ancien, passer en tête de l'ensemble.

3. Peut-on aller plus loin et former quelque conjecture sur la véritable origine de l'Opuscule des *Définitions?* J'ai parlé plus haut de Geminus; c'est que nous pouvons, par le commentaire de Proclus, nous faire une idée assez exacte de ce que disait Geminus sur ce sujet, de l'ordre qu'il suivait, des notions qu'il développait. Or, si l'on compare l'Opuscule en question, on y retrouve tous les caractères que l'on est amené à reconnaître comme propres au travail de Geminus : les mêmes définitions y sont recueillies; le même ordre est adopté; les idées qui paraissent le plus spéciales sont pareilles. On ne peut dénier la communauté d'origine.

Dira-t-on que Geminus aurait pu utiliser un travail antérieur de Héron, et que ce travail aurait été, par la suite, singulièrement mutilé pour être ramené à sa forme actuelle? Ce serait le seul moyen de sauver l'attribution à Héron. Mais une telle conjecture, bien improbable en elle-même, ne peut guère résister à un examen plus approfondi.

Si l'on se demande, en effet, à quelle époque et par qui l'Opuscule des *Définitions* a été amené, sinon à sa forme actuelle, due sans doute au compilateur postérieur à Proclus, au moins à celle que lui avait donnée l'auteur des *Prolégomènes,* il faut au moins, eu égard à la Table métrologique qui suit, descendre au IIIe siècle de notre ère. Dès lors, on pense naturellement à Anatolius, des écrits duquel le dernier compilateur a tiré la presque totalité de ce qu'il n'a pas copié dans Proclus, qu'il ait d'ailleurs ou non marqué l'origine de ces extraits.

Or nous avons vu ([1]) qu'Anatolius avait lui-même compilé Geminus : quoi de plus naturel dès lors que de conjecturer que c'est lui qui est le véritable auteur des *Prolégomènes* ([2]), et qu'il en a extrait la substance de la *Théorie des Mathématiques*, utilisée de même plus tard par Proclus?

4. En résumé, comme fonds, l'Opuscule des *Définitions* remonte bien au Ier siècle avant l'ère chrétienne, et c'est là ce qui en fait la valeur. Comme forme, il se trouve incorporé dans des *Prolégomènes* rédigés au plus tôt vers le IIIe siècle de notre ère et introduits à leur tour dans une compilation postérieure au Ve.

Le rédacteur des *Prolégomènes* (Anatolius?) a puisé, non pas dans un Ouvrage de Héron, mais bien dans celui de Geminus, en sorte que les extraits qu'il nous a conservés, relatifs aux définitions géométriques, complètent heureusement ceux que nous donne Proclus sur le même sujet.

Dès lors, pour restituer, autant qu'il est possible, l'histoire des

---

([1]) *Voir* plus haut, pages 42 et suiv.

([2]) Dans cette hypothèse, le Διονύσιος λαμπρότατος, auquel sont dédiés les *Prolégomènes*, pourrait être identifié avec Denys, l'évêque d'Alexandrie, contemporain d'Anatolius.

définitions, il faut s'appuyer sur ces deux documents, Proclus et le Pseudo-Héron, en les comparant constamment et en les utilisant sur le même pied, puisqu'à vrai dire ils ne représentent qu'un seul auteur, Geminus.

Il ressort de ce fait qu'après la période alexandrine les questions relatives aux définitions ont été considérées comme épuisées dans l'antiquité. Euclide est dès lors classique sans aucune restriction, et la Géométrie élémentaire, regardée comme parfaite, reste absolument stationnaire.

C'est sur cette conclusion que je m'arrêterai, réservant pour la seconde Partie de cet Ouvrage l'examen approfondi de ce que l'on peut savoir sur l'histoire des définitions, soit avant, soit après Euclide.

INDEX.

(Les chiffres arabes renvoient aux pages, les chiffres romains aux Chapitres dans tout le cours desquels il est parlé de l'auteur qui fait l'objet du renvoi. Les chiffres entre parenthèses sont ceux des pages des éditions citées, lorsque ces pages n'ont pas été indiquées ci-avant.)

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page 14, *ligne* 6 *en remontant.* — La preuve que j'ai mise en avant pour établir les procédés de compilation de Proclus est sans valeur; les recherches que j'ai faites sur les manuscrits du *Traité de la Sphère* m'ont en effet prouvé que cet extrait de Geminus est dû à quelque Byzantin, et n'a été mis sous le nom de Proclus que vers le xve siècle.

Page 17, *note* 2. — *Ajoutez*, vol. VI, n° 12, 1886, et n° 13, 1887. Le travail de M. G.-J. Allman est terminé; il est désirable qu'il le réunisse en un volume.

Page 57, *note* 1. — En fait, les anciens ont connu, sous le nom de *météoroscope*, deux instruments bien distincts : l'un, probablement inventé par Ptolémée et exclusivement adapté à la mesure des hauteurs méridiennes; l'autre, la sphère armillaire dont je parle d'après Proclus (*Hypotyposes*, éd. Halma, p. 137), et qui peut remonter à Hipparque.

Dans le passage auquel se rapporte cette note, les *latitudes* dont il est parlé sont les latitudes géographiques (les latitudes célestes des étoiles se mesurant directement sur les sphères armillaires); ce que j'ai voulu marquer, c'est que, dans Ptolémée, les premières applications de la Trigonométrie suivent le Chapitre où il parle de son instrument des hauteurs, et qu'en cela il devait suivre la tradition.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

10852 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

